THÈSES

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR INGENIEUR

par

Philippe BAUDRY

1re THESE. Contribution à l'étude de la granularité photographique

2e THESE. Phénomènes électro et magnéto - optiques

Soutenues le 20 Décembre 1966 devant la Commission d'examen

MM. MARECHAL *Président.*

DESPREZ
PICINBONO *Examinateurs.*
VERNIER

T H E S E S

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR-INGENIEUR

par

Philippe BAUDRY

1ère THESE. - Contribution à l'étude de la granularité photographique.

2ème THESE. - Propositions données par la Faculté : Phénomènes électro et magnéto-optiques.

Soutenues le 20 Décembre 1966 devant la Commission d'Examen

MM. MARECHAL Président

DESPREZ
PICINBONO
VERNIER
] Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE PARIS

FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

Janvier 1966 PROFESSEURS

Le Doyen ..... M. ZAMANSKY

PRENANT	T	Anatomie et histologie comparees
GRASSE	T	Evolution des etres organises
PREVOST	T	Chimie organique
WYART	T	Mineralogie et cristallographie
TEISSIER	T	Zoologie
AUGER	T	Physique quantique et relativite
MONNIER	T	Physiologie generale
PIVETEAU	T	Paleontologie
ROCARD	T	Physique E.N.S.
CARTAN	T	Mathematiques E.N.S.
LAFFITTE	T	Chimie generale
N	T	Geometrie superieure
COULOMB	T	Physique du globe
Mlle COUSIN	T	Biologie animale S.P.C.N.
CHRETIEN	T	Chimie minerale
BOCQUET	T	Zoologie
KASTLER	T	Physique E.N.S.
EPHRUSSI	T	Genetique
GAUTHERET	T	Biologie vegetale C.P.E.M.
LUCAS R.		Recherches physiques
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire
MORAND	T	Physique enseignement
SOLEILLET	T	Physique C.P.E.M.
FORTIER	T	Mecanique experimentale des fluides
DRACH	T	Zoologie
QUENEY	T	Meteorologie et dynamique de l'atmosphere
GALLIEN	T	Embryologie
EICHHORN	T	Botanique
DE CUGNAC	T	Biologie vegetale S.P.C.N.
Mlle CAUCHOIS	T	Chimie physique
THELLIER	T	Physique du globe
PONCIN	T	Mecanique generale
DUBREUIL	T	Arithmetique et theorie des nombres
QUELET	T	Chimie organique
CAGNIARD	T	Geophysique appliquee
CHAMPETIER	T	Chimie macromoleculaire
CUVILLIER	T	Micropaleontologie
JUNG	T	Geologie
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction electroniques
WIEMEN	T	Chimie organique et structurale
VASSY	T	Physique de l'atmosphere
DESTOUCHES	T	Theorie physique

AMIEL	T	Chimie generale
HOCART	T	Mineralogie et cristallographie
J. P. MATHIEU	T	Physique optique
COUTEAUX	T	Cytologie
FELDMANN	T	Biologie vegetale marine
JOST	T	Physiologie comparee
FORTET	T	Calcul des probabilites et Physique mathematique
SCHWARTZ	T	Calcul differentiel et integral
CHOUARD	T	Physiologie vegetale
MALAVARD	T	Aviation (Technique aeronautique)
BRELOT	T	Analyse superieure
NORMANT	T	Synthese organique
BENARD	T	Chimie appliquee
DUGUE	T	Statistique mathematique
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie
ULRICH	T	Physiologie vegetale appliquee
KIRRMANN	T	Theories chimiques
CHADEFAUD	T	Botanique
Mlle LE BRETON	T	Physiologie de la nutrition
LELONG	T	Application de l'analyse a la geometrie
DEVILLERS	T	Anatomie et histologie comparees
EHRESMANN	T	Topologie algebrique
FRANCON	T	Physique S. P. C. N.
GLANGEAUD	T	Geographie physique, geologie dynamique
DODEMENT	T	Mathematiques M. G. P.
PISOT	T	Technique mathematique de la physique
ROCH	T	Geologie
SCHATZMANN	T	Astrophysique
TERMIER	T	Geologie generale
ZAMANSKY	T	Mathematiques generales
LENNUIER	T	Physique M. G. P.
ROUTHIER	T	Geólogie appliquee
Mme TONNELAT	T	Physique theorique
DIXMIER	T	Mathematiques M. P. C.
SOUCHAY	T	Chimie generale
AIGRAIN	T	Electrotechnique
BRUSSET	T	Chimie systematique
LEVY	T	Physique theorique des hautes temperatures
Mme CHAIX	T	Chimie biologique
Mme HURELPY	T	Biologie vegetale C. P. E. M.
PANNETIER	T	Chimie generale I
BRUN	T	Mecanique des fluides I
Mme DUBREIL	T	Mathematiques (Agregation)
Mme LELONG	T	Mathematiques II E. N. S.
BELLAIR	T	Geologie S. P. C. N.
COTTE	T	Physique electricite
DUBOIS J. E.	T	Chimie organique physique
LAMOTTE	T	Zoologie E. N. S.
OLMER	T	Energetique generale

GAUTHIER	T	Mecanique appliquee
BARCHWITZ	T	Chimie physique
BROSSEL	T	Physique atomique
BUSER	T	Physiologie comparee
CAMUS	T	Physiologie vegetale
CURIEN	T	Mineralogie et cristallographie
POSSOMPES	T	Zoologie
PULLMANN	T	Chimie quantique
TEILLAC	T	Physique nucleaire et radioactivite
VILLE	T	Econometrie
WILLEMART	T	Chimie C.P.E.M.
FREYMANN	T	Recherches physiques
ROLLET	T	Chimie minerale
Mlle JOSIEN	T	Chimie S.P.C.N.
CHEVALLEY	T	Geometrie algebrique et theorie des groupes
GERMAIN	T	Mecanique theorique des fluides
LUCAS G.	T	Geologie
ALLARD	T	Chimie physique
BERTHELOT	T	Physique des particules fondamentales
BRICARD	T	Meteorologie
Mme ALBE-FESSARD	T	Psycho-physiologie
M. JULIA	T	Etude des molecules naturelles complexes
CHOQUET	T	Theorie des fonctions et topologie
MAGAT	T	Physico-chimie des rayonnements
Mlle QUINTIN	T	Electrochimie
MONOD	T	Chimie du metabolisme
DE POSSEL	T	Analyse numerique
CHARLOT	T	Chimie analytique
CHATELET	T	Chimie C.P.E.M.
MATTLER	T	Physique S.P.C.N.
BOUISSIERES	T	Radiochimie
Mme COUTURE	T	Thermodynamique et mecanique physique
FRANC	T	Biologie animale C.P.E.M.
SCHNELL	T	Botanique tropicale
STOLKOWSKI	T	Physiologie generale
ACHER	T	Chimie biologique
BAUDOIN	T	Biologie animale C.P.E.M.
BEAUMONT		Biologie animale S.P.C.N.
BLAMONT		Geophysique ionosphere
BOUREAU	T	Botanique
CURIE D.		Physique M.G.P.
DURAND DELGA	T	Geologie
HELLER	T	Physiologie vegetale
TORTRAT	T	Calcul des probabilites
CAILLEUX	T	Geologie S.P.C.N.
MAGNAN		Physique electricite
DAUDEL	T	Mecanique ondulatoire
Mlle FOURCROY		Biologie vegetale S.P.C.N.
Mme CHOQUET BRUHAT		Mecanique analytique et mecanique celeste
Mlle VEIL	T	Physiologie generale

LWOFF	T	Microbiologie
SIESTRUNCK	T	Mecanique physique et experim.
CABANNES	T	Mecanique generale
CAIRE	T	Geographie physique et geologie dynamique
COMOLET		Mecanique des fluides
DELLOUE	T	Physique de l'exosphere
HOUILLON		Biologie animale C.P.E.M.
OLIVIER		Anthropologie
SAMUEL	T	Mathematiques (E.N.S. Jeunes filles)
THIRY	T	Mecanique celeste
ABELES	T	Physique S.P.C.N.
AMAT	T	Thermodynamique
AUBOIN	T	Geologie
Mme BENOIT-GUEUTAL	T	Physique nucleaire et radioactivite
BOUGIS		Biologie vegetale marine Villefranche s/mer
RIGAUDY	T	Chimie S.P.C.N.
COLLONGUES		Chimie C.P.E.M.
DUBERT		Biochimie
NOZIERES		Physique generale
CADIOT		Chimie organique
IVANOFF		Oceanographie physique
FRANCOIS		Zoologie
TALBOT		Genie chimique
Mme NOUGAREDE		Botanique
BRUHAT	T	Mathematiques M.P.C.
FOURNET		Electricite generale
DEHEUVELS	T	Mathematiques Propedeutique
FURON	T	Geologie S.P.C.N.
Mme GANS	T	Genetique
GENEVES		Biologie vegetale C.P.E.M.
HUPE	T	Petrographie
HOLLANDE	T	Biologie generale
LIONS	T	Analyse numerique
MAITTE	T	Chimie organique
NICOLAS		Geologie appliquee
PANIGEL		Biologie generale
RAVIER	T	Petrographie
MOREL F.	T	Physiologie comparee
ROSEAU	T	Mecanique theorique des fluides
ROUBINE		Electronique E.S.E.
SILBER	T	Chimie C.P.E.M.
UEBERSFELD	T	Electronique
	T	Theories physiques
HERVE	T	Mathematiques
Mme PECKER-WIEMEL	T	Astrophysique
BALKANSKI		Physique M.P.C.
LE CORRE	T	Electricite
NATAF	T	Physique nucleaire et radioactivite
ECHALIER		Biologie animale C.P.E.M.
BARRAUD	T	Physique C.P.E.M.
DARS		Geologie structurale et appliquee
CAMEFORT	T	Botanique (Agregation)

VICHNIEWSKY	T	Mecanique industrielle
SIGWALT	T	Chimie S.P.C.N.
BLAQUIERE		Electronique
BARUCH		Physique Propedeutique
ARNOUS	T	Physique theorique
SLONIMSKI		Genetique
MALLIAVIN	T	Mathematiques Propedeutique
GAUDEMAR		Chimie Propedeutique
BROUSSE	T	Mecanique theorique
ROSCH	T	Astronomie
GUY	T	Physique experimentale
LAZARD		Mathematiques M.P.C.
MOREL P.		Physique M.P.C.
ARSAC		Programmation
LEFEBVRE		Chimie M.P.C.
BOK		Physique Propedeutique
CHAPDEVILLE		Biochimie
BENOIT		Physique C.P.E.M.
RIO		Chimie C.P.E.M.
JAUZEIN		Geologie E.N.S.
PREVOST G.		Biologie vegetale C.P.E.M.
FAVARD P.		Biologie animale C.P.E.M.
Mme CHARNIAUX-COTTON		Evolution des etres organises
Mlle FICINI		Chimie C.P.E.M.
LECUEUX		Astronomie
COHEN TANNOUDJI		Physique atomique
TAVERNIER		Physique C.P.E.M.
DURAND Michel		Biologie animale S.P.C.N.
PASCAUD		Physiologie
Mme PETIT		Biologie animale C.P.E.M.
CAGNAC		Physique Agregation
FALK-VAIRANT		Physique nucleaire
KRASNER	T	Mathematiques
BENZECRI	T	Statistiqies
VINH MAU		Physique M.G.P.
DUQUESNES		Physique C.P.E.M
SCHUTZENBERGER		Programmation
TREMILLON		Chimie M.P.C.
FAYARD		Chimie M.P.C.
BUVET		Chimie C.P.E.M.
AUTHIER		Physique M.P.C.
PICINBONO	T	Physique C.P.E.M.
BONNEFILLE		Electrotechnique
Mme PUISEUX DAO		Biologie vegetale

LE SECRETAIRE GENERAL

R. POULLAIN

UNIVERSITE DE PARIS

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

Janvier 1966 PROFESSEURS

MANGENOT G.	T	Biologie vegetale
JACQUINOT P.	T	Optique
GUINIER A.	T	Electricite et physique des solides
GRIVET P.	T	Electronique
BLANC-LAPIERRE A.	T	Accelerateur lineaire
L'HERITIER P.	T	Genetique des virus
LEMEE G.	T	Ecologie vegetale
MOYSE A.	T	Physiologie vegetale
DODE M.	T	Chimie thermodynamique
DENY J.	T	Mathematiques
RIVIERE A.	T	Geologie generale et sedimentologie
MICHEL A.	T	Chimie minerale
MAY R.	T	Anatomie comparee
DELANGE H.	T	Mathematiques
CHAPELLE J.	T	Physique experimentale
LACOMBE P.	T	Metallurgie
BENOIT P.	T	Physiologie generale
GUINOCHET J.	T	Biologie vegetale S.P.C.N.
NERON A.	T	Mathematiques
NOZERAN R.	T	Botanique approfondie
CASTAING R.	T	Thermodynamique
ELLENBERGER F.	T	Geologie structurale
LEDERER E.	T	Chimie biologique
RIZET J.	T	Genetique
LENDER T.	T	Biologie animale S.P.C.N.
POITOU G.	T	Mathematiques
FREON P.	T	Chimie organique
TONNELAT	T	Biologie physico-chimique
BRUNN Jan	T	Geologie historique
JEAN M.	T	Physique nucleaire
BERGERARD J.	T	Zoologie
ROGER J.	T	Paleontologie
LEFORT M.	T	Chimie nucleaire
LAGARRIGUE A.	T	Physique des hautes energies
JULLIEN J.	T	Chimie structurale organique
ARNULF A.	T	Optique
ROUAULT M.	T	Diffraction electronique
MARECHAL A.	T	Optique theorique et appliquee
MAZET R.	T	Mecanique generale
DAVID Serge	T	Chimie Agregation
GUERIN H.	T	Chimie des gaz et des combustibles
LESIEUR L.	T	Mathematiques M.P.C. et algebre
KOURGANOFF	T	Astronomie
ARNOULT P.	T	Physique electronique
KAHANE J.P.	T	Mathematiques

BROCHARD J.	T	Physique Propedeutique
Mme ROIZEN	T	Physique C.P.E.M.
BERTEIN F.	T	Electronique
MALGRANGE B.	T	Mathematiques
CORABOEUF E.	T	Physiologie animale
FRIEDEL J.	T	Physique des solides
CHEVAUGEON J.	T	Cryptogamie
MEYER P.	T	Physique theorique et atomique
LEHMANN P.	T	Accelerateur lineaire
CHABAL R.	T	Physique Propedeutique
DELCROIX J.M.	T	Physique des plasmas
CERF J.	T	Mathematiques
D'ESPAGNAT B.	T	Physique theorique
SCHAEFFER P.	T	Microbiologie
DE GENNES P.	T	Physique des solides
Mme MARTY N.		Physique Propedeutique
GOURDIN M.		Physique theorique
PEREZ-Y-JORBA		Physique Propedeutique
GORENFLOT E.		Biologie vegetale S.P.C.N.
RIOU M.		Physique nucleaire
BROUSSE R.		Geologie S.P.C.N.
LIORET C.		Physiologie vegetale
CLAUSER H.		Chimie biologique
JANCOVICI B.		Physique atomique
LURCAT J.		Physique Propedeutique
LE BERRE J.		Entomologie
LAVOREL J.		Biophysique
PERIO P.		Physique Propedeutique
FETIZON M.		Stereochimie
CHEMLA M.		Chimie des isotopes
MAZIERES C.		Chimie S.P.C.N.
VILKAS M.		Chimie C.P.E.M.
BLANDIN A.		Physique des solides
BRUN G.		Genetique
MERCOUROFF		Physique Agregation
ANDRE J.		Microscopie electronique
CHEVALLIER F.		Physiologie animale
Mlle MARCOU		Biologie cellulaire C.P.E.M.
BOURDU R.		Physiologie vegetale
BERKALOFF A.		Biologie animale C.P.E.M.
Mlle LEFORT M.		Biologie cellulaire C.P.E.M.
Mme LAMBERT		Physique C.P.E.M.
BIZOT J.C.		Physique M.P.C.
GUIRAUD J.P.		Mecanique
LABOUESSE B.		Chimie S.P.C.N.

A ma femme

Ce travail a été effectué dans les Laboratoires de Recherches de la Société KODAK-PATHE à Vincennes.

J'exprime tout d'abord ma reconnaissance à la Direction Générale et à la Direction des Recherches pour avoir autorisé et rendu possible ce travail de thèse. Je remercie très vivement M. DESPREZ, Chef du Laboratoire de Physique, de m'avoir donné ce sujet de thèse, et Monsieur le Professeur MARECHAL, Délégué Général à la Recherche Scientifique et Technique, d'avoir accepté de la diriger.

De nombreux renseignements m'ont été communiqués par les Laboratoires de Recherches de l'EASTMAN KODAK Company à Rochester (U.S.A.), en particulier MM. HIGGINS et DOERNER. Je remercie également pour leur aide mes collègues M. POLLET et M. PRETESEILLE.

Il est difficile d'énumérer toutes les personnes qui, par des discussions ou des conseils, m'ont aidé dans ce travail. Citons M. BABY, M. FERRANDIS, M. MATHIOT, M. PECHERY, M. SEVE ; M. PINNEY ; M. FARNELL, M. LUSH, M. MARRIAGE, M. SAUNDERS, M. SELWYN. Je remercie également M. LEBRUN pour son travail de mécanique de précision, Mme MOTCH pour son travail dactylographique, M. CASSET pour un grand nombre de reproductions photographiques.

L'impression Offset a ete faite par la Societe Sigma Instant Print a Dublin (Irlande).

TABLE DES MATIERES

Pages

INTRODUCTION. 1

I - HISTORIQUE 4

A - Etudes sur la granulation 4

B - Mesure au moyen de l'effet Callier. 4

C - Méthodes microdensitométriques : granularité quadratique moyenne 5

D - Autocorrélation et spectre de Wiener. 7

II - PRINCIPES MATHEMATIQUES DE BASE 10

A - Transformation de Fourier 10

1°) - Définition, inversion, existence 10
2°) - Produit de convolution. 12
3°) - Théorème de Parseval-Plancherel 14
4°) - Cas des fonctions de plusieurs variables 14
5°) - Propriétés de symétrie. Transformation de Hankel 15
6°) - Quelques transformées de Fourier utiles. 17
7°) - Application à la théorie des images optiques. 21

B - Théorie des distributions 22

1°) - Définitions 22
2°) - Quelques propriétés 24
3°) - Topologies. 25

C - Fonctions aléatoires stationnaires. 26

1°) - Moyennes, corrélation, autocorrélation . 26
2°) - Spectre de Wiener 29
3°) - Systèmes linéaires. 30
4°) - Somme de deux fonctions aléatoires à valeurs réelles 30
5°) - Systèmes non linéaires. 31

D - Loi de Poisson. 32

E - Equations intégrales. 34

1°) - Définitions 34
2°) - Exemple : l'intégrale d'Abel. 35

III - EXPRESSIONS MATHEMATIQUES DE LA GRANULARITE . . . 37

A - Représentation de la granularité par une fonction aléatoire. 37

B - Granularité Selwyn et syzygétique 39

C - Autocorrélation et spectre de Wiener. 41

D - Remplacement de la transmission par la densité 43

E - Equations aux dimensions. 44

F - Modèles statistiques. 45

1°) - Modèle statistique de CLARK-JONES . . . 46
2°) - Modèles de PICINBONO et de SAVELLI. . . 47

IV - DESCRIPTION ET ETUDE DE L'APPAREIL 49

A - Partie optique et mécanique 49

B - Partie électronique 51

C - Mesures de granularité. 51

D - Bruit de fond du photomultiplicateur ; étude photométrique de l'appareil 57

1°) - Bruit de fond 57
2°) - Sensibilité des photomultiplicateurs. . 59
3°) - Evaluation du flux lumineux 59
4°) - Synthèse des résultats. . . . . .

V - QUELQUES RESULTATS ET LEUR INTERPRETATION 63

A - Exemples de résultats 63

1°) - Vérification de la loi de Selwyn. . . . 63
2°) - Influence de la densité sur la granularité. 63
3°) - Influence de la densité sur la forme du spectre de Wiener. 64
4°) - Influence du révélateur 64
5°) - Emulsion radiographique : influence du kilovoltage. 64
6°) - Emulsion radiographique exposée avec écran 65

B - Modèle statistique faisant intervenir les agglomérations de grains. 65

1°) - Généralisation de la loi de Poisson . . 73
2°) - Spectre de Wiener d'une somme d'impulsions dans le plan. 75
3°) - Application à un modèle statistique du type de celui de CLARK-JONES. 80

VI - EFFET CALLIER 82

A - Généralités sur l'effet Callier 82

1°) - Définitions 82
2°) - Principe de réciprocité 84
3°) - Etude expérimentale : indicatrices de diffusion 87

B - Effet Callier et granularité. 96

1°) - Etude théorique pour un échantillon très mince. 96
2°) - Etude expérimentale 104

C - Influence des ouvertures numériques 106

1°) - Mesures de densité. 106
2°) - Mesures de granularité. 110

VII - PROBLEMES D'ECHANTILLONNAGE 114

A - Estimation d'une valeur moyenne 116

B - Estimation d'une valeur quadratique moyenne . 119

C - Estimation d'un spectre de Wiener 119

1°) - Première méthode. 119
2°) - Deuxième méthode. 123

D - Applications. 126

1°) - Fluctuations de position de l'aiguille de l'instrument 126
2°) - Erreurs d'échantillonnage 127
3°) - Cas de plusieurs échantillons 130
4°) - Application à l'analyse harmonique optique 131
5°) - Retour sur la définition du spectre de Wiener 133

VIII - PROBLEMES DE FONCTIONS D'APPAREIL 135

A - Formes expérimentales du spectre de Wiener. . 135

1°) - Cas d'une tache rectangulaire 137
2°) - Cas limites : tache ponctuelle et fente infiniment longue 138
3°) - Cas d'une tache circulaire. 139
4°) - Décomposition en gaussiennes. 140
5°) - Résultats pratiques des formules. . . . 144

B - Inversion des formules. 147

1°) - Considérations sur les équations intégrales de première espèce 147
2°) - Méthode matricielle 151
3°) - Emploi des fonctions gaussiennes. . . . 156
4°) - Vérification expérimentale. 158

IX - EVALUATIONS GLOBALES DE LA GRANULARITE. 163

A - Relations avec le spectre de Wiener 163

1°) - Granularité Selwyn. 163
2°) - Granularité syzygétique 165
3°) - Cas général 165

B - Problèmes d'équations intégrales. 166

1°) - Détermination du spectre de Wiener à partir d'une évaluation globale dépendant d'un paramètre 166
2°) - Relations entre différentes expressions globales de la granularité. . . . 166
3°) - Détermination d'une évaluation globale à partir d'une expression quelconque du spectre de Wiener. 168

C - Méthodes de calcul numérique. 170

1°) - Méthode matricielle 170
2°) - Méthode par décomposition en gaussiennes 170

D - Relation entre granulation et granularité . . 171

CONCLUSION. 178

APPENDICE - PROGRAMMES DE CALCUL. 179

A - Calcul de la matrice de transformation K donnant $\phi(\nu)$ à partir de $s(\rho)$. 179

B - Utilisation des résultats dans des produits multiples de matrices 179

C - Emploi direct de la matrice calculée par le programme précédent 180

D - Calcul de Lc/a en fonction de bL. 180

E - Programme général de transformation par la méthode de décomposition en gaussiennes . . . 180

BIBLIOGRAPHIE 199

INTRODUCTION

L'émulsion photographique est constituée de petits cristaux d'halogénure d'argent dispersés dans de la gélatine, comme le montre la Fig. 1 . Lorsque l'émulsion est exposée à la lumière, des germes d'argent réduit sont formés dans les cristaux ; au cours du développement, certains de ces cristaux sont entièrement réduits à l'état d'argent métallique. La proportion de cristaux réduits est d'autant plus grande que l'exposition a été plus forte, ce qui conduit à la formation d'une image négative. Comme on le sait, cette image négative est transformée par tirage en une image positive. Vue à grande échelle, l'image négative ou positive est constituée de plages plus ou moins claires ou sombres représentant l'objet photographié ; un examen plus approfondi fait apparaître la structure granulaire de l'image. Les propriétés des émulsions sont très variables à ce point de vue.

Par convention, on appelle "granulation" toute estimation subjective du phénomène et "granularité" tout résultat de mesure objective au moyen d'un appareil. La même distinction se retrouve en anglais : "graininess" et "granularity" ; en allemand on emploie le terme général "Körnigkeit".

Le phénomène est complexe : il dépend à la fois de la forme, de la dimension et de l'arrangement des grains dans l'émulsion développée. Comme le montre la Fig. 2 , les grains d'argent développé ont une structure filamenteuse (cette structure est à la limite du pouvoir de résolution du microscope optique) ; la forme plus ou moins développée ou ramassée de ces filaments dépend beaucoup du révélateur. La dimension des grains développés dépend surtout de la dimension des cristaux d'halogénure, donc de la sensibilité de l'émulsion : on sait en effet qu'une émulsion est d'autant plus sensible que les cristaux sont plus gros. Enfin les grains d'argent peuvent être répartis au hasard, ou bien agglomérés en amas : dans ce dernier cas la granularité augmente, c'est le phénomène qu'en anglais on appelle "clumping".

Un signal électrique est accompagné d'un bruit de fond dû à la structure granulaire de l'électricité. Ici le phénomène est tout à fait comparable : l'image photographique est un signal et la granularité un bruit de fond. Pour cette raison, les méthodes mathématiques que nous emploierons dans cette étude sont très proches de celles employées en électronique ; la différence principale réside dans le fait que l'image photographique est un phénomène à deux dimensions, alors qu'un signal électrique est un phénomène à une dimension. Dans les formules apparaîtront généralement des fonctions de deux variables, alors qu'en électronique on emploie des fonctions d'une variable.

Si l'on examine quelles sont les caractéristiques essentielles dont dépend la qualité d'un film, on peut citer : la sensibilité, la définition, la finesse du grain, la latitude de pose , ce à quoi on doit ajouter bien entendu, dans le cas d'un film en couleurs, la qualité de la reproduction des couleurs. Parmi ces caractéristiques, la finesse du grain n'est pas l'une des moins importantes, et l'étude de la granularité est d'un grand intérêt pour l'industrie photographique.

Ce travail a consisté à construire un appareil permettant la mesure de la granularité, et à étudier de façon approfondie un certain nombre des problèmes posés par la mesure de la granularité. C'est l'étude de ces problèmes qui constitue la partie proprement originale du travail ; les premiers chapitres sont destinés à en faciliter la compréhension.

Fig. 1 - Emulsion vierge (G = 3000)

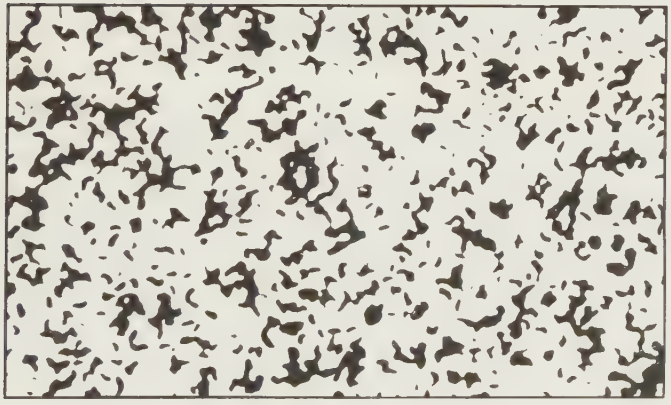


Fig. 2 - Emulsion développée (G = 2000)
N.B. Il ne s'agit pas de la même émulsion.

I - HISTORIQUE

A - Etudes sur la granulation

Les premières études publiées sur la granulation remontent à 1920 avec L.A. JONES (1) (2). Ces auteurs utilisent un appareil qui projette sur un écran l'image de l'échantillon ; entre le projecteur et l'écran , le faisceau lumineux est réfléchi sur un miroir que l'on peut déplacer de façon à faire varier le grandissement ; on note la position pour laquelle l'impression de granulation disparaît. Cette méthode a permis des essais de films en routine.

D'autres auteurs étudient également cette question, avec des méthodes diverses : J.I. CRABTREE (3) (4) étudie par projection l'effet de fourmillement dû au grain des films cinématographiques et donne un jugement : "très mauvais - mauvais - moyen - bon - très bon". Dans l'appareil de R. LANDAU (5) l'échantillon est comparé visuellement avec une série de 7 échantillons étalons. Dans le "comparison microscope" de D.E. CONKLIN (6) l'échantillon à étudier est comparé à un échantillon étalon et l'on fait varier le grandissement jusqu'à ce que la granulation paraisse égale sur les deux plages. E.M. LOWRY (7) emploie un appareil analogue à celui de JONES et DEISCH.

Plus tard, en 1951, L.A. JONES et G.C. HIGGINS (8) (9) (10) présentent une version nouvelle de l'appareil original : le projecteur est mobile sur un rail, la mise au point étant maintenue automatiquement. Différentes études, dont certaines récentes, ont également été publiées par M. BILTZ et F. NAGANO (11) par F.A. HÜBNER (12) et surtout par W. ROMER (13) à (17) . Le problème reste intéressant malgré le développement des méthodes objectives : celles-ci donnent en principe une meilleure précision que les méthodes subjectives, mais l'appareil peut avoir une réponse différente de celle de l'oeil et c'est généralement l'oeil qui est le juge final de la qualité d'un produit photographique.

B - Mesures au moyen de l'effet Callier

A. CALLIER avait publié en 1909 (186) une étude sur les propriétés diffusantes des émulsions développées , où il définissait le coefficient :

$$Q = \frac{D_{//}}{D_{\perp}}$$

égal au rapport des densités diffuse et dirigée ; il notait une relation entre ce coefficient et la grosseur du grain. D'où l'idée, émise par S.D. THREADGOLD (18) (19) , d'évaluer la granularité au moyen du coefficient de Callier. J. EGGERT et A. KÜSTER (20) à (23) suggèrent l'emploi de la quantité :

$$K = 100 \log Q$$

comme mesure de la granularité. H. BRANDES (24), G. HANSEN et P.H. KECK (25), H. FRIESER et W. HORNUNG (26) étudient également cette méthode. Par contre E.M. LOWRY (7) ne trouve pas de relation précise entre le coefficient K et la granulation. M.G. FRACASTORO (27) recommande de travailler avec immersion pour éliminer les causes d'erreur dues à la surface de l'émulsion, mais ne trouve pas encore de relation très nette. Finalement, après avoir fait l'objet de controverses, cette méthode a été reconnue trop peu précise pour fournir une mesure valable. Nous discuterons cette question au chapitre VI .

C - Méthode microdensitométrique : granularité quadratique moyenne.

En 1933, P. BRICOUT (28) construit un appareil de type microdensitométrique : l'échantillon est examiné dans un microscope de faible grossissement et les variations locales de densité sont mesurées au moyen d'un photomètre visuel ; la tache d'exploration est circulaire et son diamètre est de l'ordre de 10 microns. L'appareil de A. VAN KREVELD (29) (30) (31) est plus compliqué : il étudie les différences d'éclairement entre deux plages concentriques, l'une circulaire, l'autre annulaire. Un dispositif optique spécial permet de mesurer la valeur absolue moyenne de ces différences. A. GOETZ et W.O. GOULD (32) (33) emploient une combinaison de deux appareils : l'un enregistre les variations de la densité lorsque l'échantillon défile ; l'enregistrement est photographique, analogue à une piste sonore de film à aire variable. L'autre appareil mesure à partir de cet enregistrement la répartition des valeurs de la densité et en déduit une évaluation de la granularité.

La granularité peut donc être caractérisée par l'écart absolu moyen ou quadratique moyen de la densité par rapport à la valeur moyenne ; cet écart dépend bien entendu de la tache d'exploration. Ce problème a été étudié théoriquement en 1935 par E.W.H. SELWYN (34) qui, partant de considérations d'analyse dimensionnelle, démontre la

relation suivante :

$$P(\Delta , d\Delta) = \frac{a}{\pi G^2} e^{-\Delta^2 a/b^2} d\Delta$$

où $P(\Delta , d\Delta)$ est la probabilité pour que la valeur de la densité soit comprise entre Δ et $\Delta + d\Delta$, a est l'aire de la tache d'exploration et G une constante caractéristique de l'échantillon. L'écart absolu moyen est donc égal à $G/\sqrt{\pi a}$ et l'écart quadratique moyen σ_D à $G/\sqrt{2a}$. On peut donc écrire :

$$\sigma_D \cdot \sqrt{2a} = G = cte$$

Cette relation est appelée "loi de Selwyn" et le coefficient G est appelé "coefficient de Selwyn" ou "granularité Selwyn". Les hypothèses faites pour la démonstration sont les suivantes :

- les fluctuations de densité sont petites.

- les grains d'argent sont petits devant la tache d'exploration.

- il n'y a pas de corrélation entre la position d'un grain et celle d'un autre grain, c'est-à-dire que les grains sont répartis au hasard.

Pratiquement, la loi de Selwyn est vérifiée pour des émulsions photographiques exposées uniformément, si la tache d'exploration a un diamètre d'au moins 20 ou 30 microns ; elle n'est pas vérifiée dans des cas plus complexes : copies positives de négatifs granuleux, émulsions exposées aux rayons X.

Avec une théorie statistique, W.J. ALBERSHEIM (35) arrive à des conclusions analogues à celles de SELWYN. H. SIEDENTOPF (36) étudie théoriquement la relation entre la granularité et la densité et démontre la relation suivante :

$$\sigma_D = k \sqrt{D}$$

La loi de Siedentopf est approximativement vérifiée par l'expérience ; des écarts apparaissent surtout pour des densités assez élevées, de l'ordre de 2.

Les appareils de type microdensitométrique prennent à partir de 1952 une forme plus moderne avec celui de R. DEBOT (37) qu'il appelle "granularomètre électronique", ceux de M. SAVELLI (74), de H. FRIESER (73), de L.A. JONES et G.C. HIGGINS (40), de E.C. DOERNER (76). On ne fait plus d'enregistrement sur papier ou sur film ; l'exploration de l'échantillon est rapide et la granularité se traduit par des variations de courant d'un récepteur photoélectrique ; on mesure la moyenne quadratique de ces variations au moyen d'un thermocouple ou d'un voltmètre électronique.

Une autre méthode d'évaluation est la méthode de la "granularité syzygétique" (du grec συζυγία , réunion) de L.A. JONES et G.C. HIGGINS (38) (39). Ces auteurs analysent la façon dont un observateur perçoit la granulation : l'oeil est animé d'un mouvement incessant ou "nystagmus" et l'aspect granulaire de l'échantillon se traduit par des fluctuations d'éclairement des cellules de la rétine. La moyenne des différences d'éclairement entre deux cellules voisines peut se représenter de la façon suivante : on emploie deux taches d'exploration circulaires adjacentes et l'on mesure la moyenne des différences de transmission ou de densité obtenues avec des deux taches. Avec cette méthode, JONES et HIGGINS ont obtenu une bonne corrélation avec les mesures de granulation.

D - Autocorrélation et spectre de Wiener

Une analyse beaucoup plus poussée du phénomène est faite au moyen de l'autocorrélation et du spectre de Wiener . Cette méthode est le résultat de recherches mathématiques faites dans différents domaines :

1°) - La théorie des fonctions aléatoires stationnaires. En 1930 N. WIENER (43) (44) étudie en détail différentes généralisations possibles de l'analyse harmonique par transformation de Fourier. Il développe en particulier l'idée du "périodogramme" émise au début de ce siècle par A. SCHUSTER (41) (42). Le périodogramme est la transformée de Fourier de l'autocorrélation ; SCHUSTER l'employait pour la recherche de périodicités dans les phénomènes géophysiques. N. WIENER avait bien vu certaines difficultés qu'il résolvait par l'emploi d'une intégrale de Stieltjes ; comme nous le verrons, ces difficultés ne sont complètement résolues que par l'emploi de la théorie des distributions. La théorie des fonctions aléatoires stationnaires est ensuite développée par différents chercheurs tels que H. CRAMER (45) (46) et M. LOEVE (47) (48) (49).

2°) - L'application à l'optique de la transformation de Fourier. P.M. DUFFIEUX (50) remarque l'intérêt de la transformation de Fourier dans l'étude de la diffraction. On introduit ensuite la notion de "fréquence spatiale" par analogie avec les fréquences temporelles utilisées en électronique ; la "fonction de transfert de modulation" représente la réponse d'un système aux fréquences spatiales. Ces notions sont appliquées à l'optique et à la photographie (51) à (58).

3°) - La théorie de l'information (59) (60) due à H. NYQUIST (61), R.V.L. HARTLEY (63) et surtout à D. GABOR (64), C.E. SHANNON (65). Le contenu d'information d'un message est évalué au moyen d'une unité appelée le "bit" (binary digit) exprimant la réponse à une question par oui ou par non ; la notion de "bruit de fond" est introduite, représentant les erreurs aléatoires engendrées par le système de transmission du message.

En 1953 P.B. FELLGETT montre qu'on peut appliquer la théorie de l'information à la photographie. Le bruit de fond est la granularité et peut être étudié au moyen de sa fonction d'autocorrélation : cette fonction donne sur le phénomène des renseignements beaucoup plus complets que la simple connaissance de l'écart quadratique moyen. FELLGETT (66) suggère l'emploi d'un autocorrélateur optique qui ne semble pas avoir été effectivement réalisé. Les difficultés sont de deux sortes : on mesure une fonction, que nous pouvons appeler $R(\tau)$, et c'est en fait la différence $R(\tau) - R(0)$ qui nous intéresse ; cette différence est faible en valeur relative. D'autre part on doit faire des décalages de l'ordre de quelques microns entre l'échantillon et son image optique. S. OOUE (67) , H. OHZU et H. KUBOTA (68) ont pu employer un autocorrélateur optique du type de celui de E.R. KRETZMER (69), mais en faisant d'abord une photographie agrandie de l'échantillon au moyen d'un microscope. Cette méthode n'a été employée que par un petit nombre de chercheurs ; il semble que la mise en oeuvre soit assez difficile.

L'intérêt de l'emploi du spectre de fréquences spatiales est montré en 1955 par B. PICINBONO et M. SAVELLI (70) (74) et par R. CLARK-JONES (71). En électronique on disait en général "spectre de puissance" parce que la valeur efficace du signal représente une puissance et que ce spectre représente la contribution à cette puissance des différentes fréquences ; ici la moyenne quadratique de la transmission ne représente pas une puissance : on emploie souvent le terme "spectre de Wiener " proposé par CLARK-JONES. On peut dire aussi "spectre de fréquences" ou "spectre de fréquences spatiales".

Les appareils du type microdensitométrique conviennent bien pour la détermination de cette fonction : il suffit de faire l'analyse en fréquences du signal donné par le récepteur photoélectrique (73) (74) (75) . On peut aussi, comme l'ont fait H.J. ZWEIG (77) et plus récemment M. DE BELDER (78) , enregistrer sur cartes perforées ou sur bande de papier perforée le résultat des mesures de transmission ou de densité faites en un grand nombre de points de l'échantillon, et calculer l'autocorrélation et le spectre de Wiener à l'aide d'un ordinateur. Une autre méthode est l'"analyse harmonique optique", où l'analyse en fréquences spatiales est faite au moyen de la figure de diffraction donnée par l'échantillon. Cette méthode, due à J. GAULTIER DU MARACHE (79) est appliquée au bruit de fond photographique par P. CROCE et M. MARQUET (80) (81) (82) par H. THIRY (83) et par R. DESPREZ et J. POLLET (84).

Des "modèles statistiques" ont été étudiés par P. FAURE, B. PICINBONO et M. SAVELLI (85) à (92). Le problème consiste à évaluer théoriquement le spectre de Wiener en partant d'hypothèses données sur la forme, la dimension et la répartition des grains d'argent. Signalons que cette question des modèles statistiques a récemment repris de l'importance avec les recherches faites par B.E. BAYER (93) sur le calcul théorique, au moyen d'un ordinateur, des propriétés du premier ordre (courbe de noircissement) et du second ordre (granularité) de l'émulsion photographique développée.

II - PRINCIPES MATHEMATIQUES DE BASE

L'étude de la granularité mène à l'emploi de techniques mathématiques avancées : afin de ne pas alourdir les chapitres suivants de développements mathématiques trop importants, nous allons réunir dans ce chapitre un certain nombre de définitions et de théorèmes dont nous aurons besoin ; nous préciserons les notations employées et nous démontrerons diverses formules qui seront utiles dans la suite.

A - Transformation de Fourier (151)(152)

1°) - Définition, inversion, existence

Les transformations de Fourier et de Laplace s'introduisent dans l'étude de divers phénomènes physiques : transmission de la chaleur, systèmes mécaniques, électriques ou électromécaniques, systèmes optiques, etc... Ces systèmes ont la propriété d'être des "filtres linéaires" ; un filtre linéaire transforme une fonction d'entrée $f(x)$ en une fonction de sortie $g(x)$ avec les propriétés suivantes :

a) - Si à $f_1(x)$ correspond $g_1(x)$ et si à $f_2(x)$ correspond $g_2(x)$, à

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$$

correspond toujours

$$\alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x)$$

b) - La relation entre $f(x)$ et $g(x)$ n'est pas modifiée par un changement d'origine de la variable x.

Ces filtres linéaires ont pour fonctions propres des exponentielles complexes, ce qui justifie l'emploi des transformations de Fourier et de Laplace. Dans les cas où la variable est le temps, la réponse du système est nulle aux instants antérieurs à l'excitation, ce qui justifie l'emploi de la transformation de Laplace qui s'exprime par une intégrale entre 0 et $+\infty$. En optique, au contraire, interviennent presque toujours des fonctions paires ou à symétrie de révolution, pour lesquelles la transformation de Fourier donne des résultats simples.

La forme la plus ancienne est la série de Fourier : une fonction périodique $f(x)$ de période T peut être représentée, sous certaines conditions, par une somme de fonctions sinusoïdales comprenant un terme constant, un fondamental et des harmoniques :

$$f(x) = a_o + a_1 \sin(2\pi \frac{1}{T} x - \varphi_1) + a_2 \sin(2\pi \frac{2}{T} x - \varphi_2) \ldots$$

$$\ldots + a_n \sin(2\pi \frac{n}{T} x - \varphi_n) \ldots\ldots$$

La transformation de Fourier est une généralisation à des fonctions non périodiques, la série étant remplacée par une intégrale. On y remplace les fonctions sinusoïdales par des exponentielles imaginaires, ce qui la rend plus maniable. On écrit :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2i\pi\nu x}\, dx$$

et la formule d'inversion est la suivante :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\, e^{2i\pi\nu x}\, d\nu$$

Au lieu de la fréquence ν, on peut faire intervenir la pulsation $\omega = 2\pi\nu$, ce qui donne :

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

avec

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega)\, e^{i\omega x}$$

ou encore :

$$\psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\omega)\, e^{i\omega x}\, dx$$

De ces trois variantes de la transformation de Fourier nous emploierons exclusivement la première, qui est la plus courante dans les publications de langue française.

On désigne quelquefois la transformation de Fourier par le signe $\mathcal{F}$; en omettant les variables, on écrit :

$$F = \mathcal{F} f$$

L'intégrale n'est pas toujours convergente ; on démontre deux conditions suffisantes à la convergence de cette intégrale :

- si la fonction f(x) appartient à L, espace des fonctions "sommables", c'est-à-dire pour lesquelles l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \quad dx$$

a une valeur finie, alors l'intégrale de Fourier est absolument convergente.

- si la fonction f(x) appartient à L^2, espace des fonctions "de carré sommable", c'est-à-dire pour lesquelles l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \quad dx$$

a une valeur finie, alors l'intégrale de Fourier converge en moyenne quadratique :

$$F(\nu) = \lim_{\substack{\text{en m.q.} \\ A \to \infty}} \int_{-A}^{+A} f(x)\, e^{-2i\pi\nu x} \quad dx$$

2°) - <u>Produit de convolution (151)(152)</u>

Le produit de composition ou produit de convolution exprime comment une fonction est déformée, par exemple dans une mesure où la résolution est limitée ; la deuxième fonction peut s'appeler "fonction d'étalement" ou "fonction de diffusion". Si l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(x'-x)\, dx$$

existe et est égale à une fonction h(x'), on écrit :

$$f * g = h$$

et l'on dit que la fonction h est le produit de convolution des fonctions f et g.

Pour écrire des calculs compliqués de façon claire, une certaine souplesse dans les notations est souvent utile. Par exemple, on peut écrire :

$$h(x') = f(x) * g(x' - x)$$

ou encore, en confondant les variables x et x' :

$$h(x) = f(x) * g(x)$$

Ceci a pour effet de simplifier les notations en réduisant le nombre des variables. On peut écrire également :

$$h(x) = (f * g)\,(x)$$

Cette dernière notation nous servira également. D'autre part nous désignerons par le signe $2*$ placé en exposant le "carré de convolution" d'une fonction :

$$f * f = f^{2*}$$

Si l'on désigne par F(ν), G(ν) et H(ν) les transformées de Fourier respectives de f(x), g(x) et h(x), on a la formule :

$$F(\nu) \cdot G(\nu) = H(\nu)$$

Le produit de convolution de deux fonctions f et g se traduit par le produit algébrique de leurs transformées de Fourier F et G ; c'est de cette propriété fondamentale que découle l'emploi fréquent de la transformée de Fourier. Il en découle que le produit de convolution est commutatif et associatif.

En faisant $\nu = 0$ on obtient :

$$H(0) = F(0) \cdot G(0)$$

ce qui donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$$

3°) - Théorème de Parseval ou de Plancherel.

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions appartenant à L^2 et si $F(\nu)$ et $G(\nu)$ sont leurs transformées de Fourier respectives on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g^{*}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\, G^{*}(\nu)\,d\nu$$

l'astérisque signifiant "complexe conjugué".

Si l'on fait $g(x) = f(x)$ il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x)\right|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F(\nu)\right|^2 dx$$

4°) - Cas de fonctions de plusieurs variables.

La transformation de Fourier se définit de la même façon pour des fonctions de plusieurs variables. On remplace seulement les intégrales simples par des intégrales multiples et toutes les formules se généralisent de façon immédiate. Par exemple, la définition devient :

$$F(\nu,\mu\ldots) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y\ldots)\, e^{-2i\pi(\nu x+\mu y+\ldots)}\,dx\,dy\ldots$$

Une fonction $f(x,y\ldots)$ appartient à L si l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y\ldots) \quad dx\, dy \ldots$$

a une valeur finie.

Le produit de convolution se définit comme suit :

$$h(x'y'\ldots) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y\ldots)\, g(x'-x,y'-y\ldots)\, dx\, dy \ldots$$

Le théorème de Parseval s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F(\nu,\mu\ldots)\right|^2 d\nu d\mu \ldots = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x,y\ldots)\right|^2 dx dy \ldots$$

Un cas simple est celui où la fonction de plusieurs variables se décompose en produit de fonctions d'une variable :

$$f(x,y\ldots) = f_1(x) \cdot f_2(y) \ldots$$

Si $F_1(\nu)$, $F_2(\mu)$ ... sont les transformées de Fourier à une dimension des fonctions $f_1(x)$, $f_2(y)\ldots$, alors la transformée de Fourier à n dimensions de $f(x,y)\ldots$ est donnée par :

$$F(\nu,\mu\ldots) = F_1(\nu) \cdot F_2(\mu) \ldots$$

5°) - <u>Propriétés de symétrie - Transformation de Hankel.</u>

Nous devons apporter quelques précisions sur les notations : étant donnée une fonction $f(x)$, on appelle $\check{f}(x)$ la fonction $f(-x)$ et $f^*(x)$ le complexe conjugué de $f(x)$. Pour le complexe conjugué nous n'écrirons pas $\bar{f}(x)$; cette notation sera réservée à désigner des valeurs moyennes.

Si la fonction f(x) est paire on écrit :

$$f = \overset{\vee}{f}$$

Si la fonction f(x) est à valeurs réelles on écrit :

$$f = f^*$$

Le carré du module s'écrit $|f|^2$ ou ff^*

Nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)\, e^{-2i\pi\nu x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{2i\pi\nu y}\, d(-y)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-2i\pi(-\nu)y}\, dy = F(-\nu)$$

Donc si $\mathcal{F} f = F$, $\mathcal{F} \overset{\vee}{f} = \overset{\vee}{F}$

Si une fonction est paire, sa transformée de Fourier l'est aussi.

D'autre part :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\, e^{-2i\pi\nu x}\, dx = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{2i\pi\nu x}\, dx\right]^*$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2i\pi(-\nu)x}\, dx\right]^* = \overset{\vee}{F}^*$$

Donc si $\mathcal{F} f = F$, $\mathcal{F} f^* = \overset{\vee}{F}^*$

Si une fonction est à valeurs réelles, sa transformée de Fourier F a la propriété $F = \overset{\vee}{F}^*$ ou $F(\nu) = F^*(-\nu)$.

Si une fonction est à la fois réelle et paire, il en est de même de sa transformée de Fourier.

Les mêmes relations sont vraies pour des fonctions de n variables si nous posons $f(x,y\ldots) = f(-x,-y\ldots)$.

A partir de deux variables, un cas plus particulier est celui où la fonction f(x,y)... ne dépend que de la seule variable :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + \ldots}$$

Alors, si l'on pose :

$$\rho = \sqrt{\nu^2 + \mu^2 + \ldots}$$

la transformée de Fourier $F(\nu,\mu\ldots)$ ne dépend que de ρ et L. SCHWARTZ (152, p.225) donne les formules générales suivantes :

$$F(\rho) = \frac{2\pi}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^{+\infty} r^{n/2} \; J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\rho r)\, f(r)\, dr$$

$$f(r) = \frac{2\pi}{r^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^{+\infty} \rho^{n/2} \; J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\rho r)\, F(\rho)\, d\rho$$

La transformation qui donne $F(\rho)$ à partir de $f(r)$ s'appelle la transformation de Hankel. Pour les fonctions d'une variable le cas considéré se confond avec celui des fonctions paires et l'on obtient :

$$F(\nu) = 2\int_0^{+\infty} f(x) \cos 2\pi\nu x \; dx$$

$$f(x) = 2\int_0^{+\infty} F(\nu) \cos 2\pi\nu x \; dx$$

Dans le cas de deux variables on a (153) :

$$F(\rho) = 2\pi \int_0^{+\infty} rf(r)\, J_o(2\pi\rho r)\, dr$$

$$f(r) = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho F(\rho)\, J_o(2\pi\rho r)\, d\rho$$

Dans ce dernier cas la transformation de Hankel est dite "d'ordre zéro".

6°) - Quelques transformées de Fourier (154 , p.20-22)

Les transformées de Fourier que nous allons voir nous seront souvent utiles au cours des chapitres suivants :

a) - Fonction "créneau" ou impulsion rectangulaire. (Fig. 3)

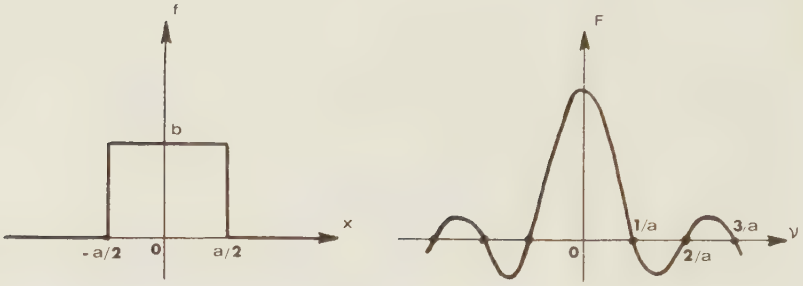


Fig. 3

$$f(x)\begin{cases} = b \text{ si } |x| < a/2 \\ = 0 \text{ si } |x| > a/2 \end{cases} \qquad F(\nu) = \frac{b}{\pi\nu} \sin \pi\nu a = ab \, \frac{\sin \pi\nu a}{\pi\nu a}$$

b) Impulsion triangulaire (Fig. 4)

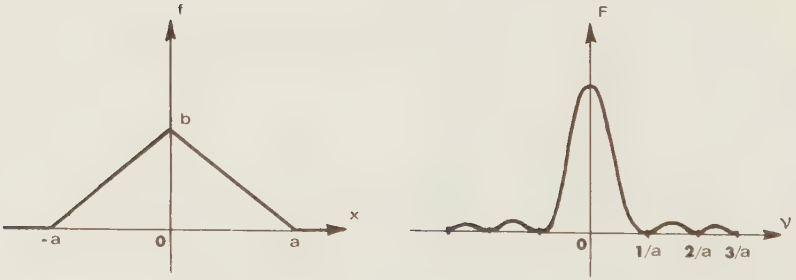


Fig. 4

$$f(x)\begin{cases} = b\left(1 - \frac{|x|}{a}\right) & \text{si } |x| < a \\ = 0 & \text{si } |x| > a \end{cases}$$

$$F(\nu) = \frac{b}{\pi^2\nu^2 a} \sin^2 \pi\nu a = ab\left(\frac{\sin \pi\nu a}{\pi\nu a}\right)^2 \qquad (II - 1)$$

c) - Fonction gaussienne d'une variable (Fig. 5).

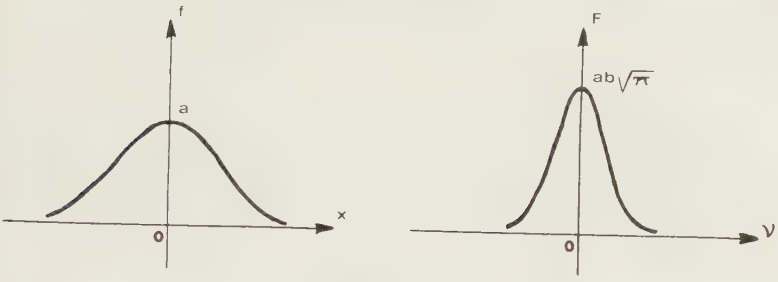


Fig 5

$$f(x) = a\, e^{-x^2/b^2} \qquad F(\nu) = ab\sqrt{\pi}\; e^{-\pi^2 b^2 \nu^2}$$

d) - Fonction "créneau rectangulaire" (Fig. 6).

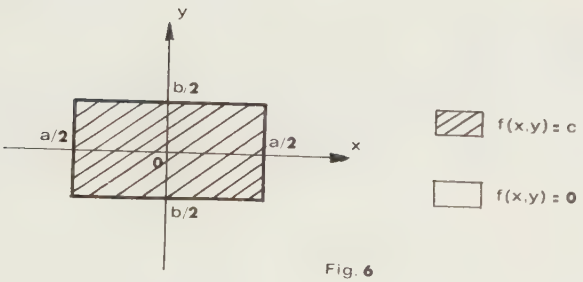


Fig. 6

$$f(x,y) \left| \begin{array}{l} = c \text{ si } \quad |x| < \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad |y| > \frac{b}{2} \\ = 0 \text{ dans le cas contraire} \end{array} \right.$$

$$F(\nu,\mu) = abc\, \frac{\sin \pi\nu a}{\pi\nu a} \quad \frac{\sin \pi\mu b}{\pi\mu b} \qquad \text{(II - 2)}$$

e) - Fonction "créneau circulaire" (Fig. 7)

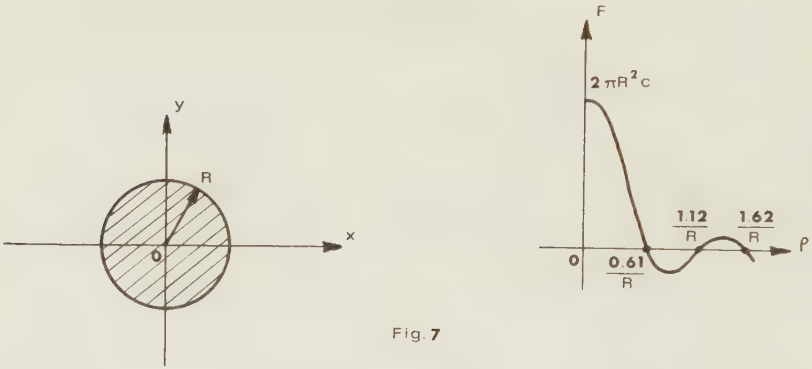


Fig. 7

$$f(x,y) = f(r) \begin{cases} = c \text{ si } r < R \\ = 0 \text{ si } r > R \end{cases}$$

$$F(\nu,\mu) = F(\rho) = \frac{cR}{\rho} J_1(2\pi\rho R)$$

$$= 2\pi R^2 c \frac{J_1(2\pi\rho R)}{2\pi\rho R} \qquad (II - 3)$$

f) - Fonction gaussienne à symétrie de révolution (Fig. 8).

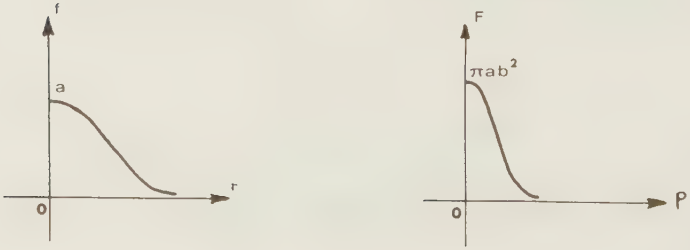


Fig. 8

$$f(x,y) = a\, e^{-\frac{x^2+y^2}{b^2}} \qquad \text{ou} \qquad f(r) = a\, e^{-r^2/b^2}$$

$$F(\nu,\mu) = \pi ab^2\, e^{-\pi^2 b^2(\nu^2+\mu^2)} \qquad \text{ou} \qquad F(\rho) = \pi ab^2\, e^{-\pi^2 b^2 \rho^2} \qquad \text{(II - 4)}$$

Une propriété générale est la suivante : plus la fonction est étroite, plus sa transformée de Fourier est étalée et réciproquement. Les six exemples que nous venons de voir vérifient cette loi dont la démonstration est simple : si $F(\nu)$ est la transformée de Fourier de $f(x)$, celle de $f(ax)$ est $\frac{1}{a} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$.

7°) - Application à la théorie des images optiques (154) (155) (156).

Dans une image optique on considère des "fréquences spatiales" exprimées en périodes par mm, ou mm^{-1}, et représentées dans un plan de coordonnées ν,μ. Nous allons reprendre brièvement l'exposé de la question fait par A. MARECHAL (156) : un objet étendu est caractérisé par une répartition de luminance $O(y,z)$ et l'image d'un point lumineux dans le plan image par une fonction $D(y',y,z',z)$ que l'on appelle "tache de diffusion". Dans le cas simple où la tache de diffusion est la même dans toute l'étendue du plan image on écrit $D(y'-y,z'-z)$. Si nous choisissons les unités de longueur de telle façon que le grandissement soit égal à 1, l'image globale est constituée par la sommation de ces divers éléments et la répartition des éclairements dans l'image est donnée par :

$$I(y',z') = \int_{-\infty}^{+\infty} O(y,z)\, D(y'-y,z'-z)\, dy\, dz$$

autrement dit :

$$I = O * D$$

ce qui en transformée de Fourier se traduit par :

$$\mathcal{I} = \mathcal{O} \cdot \mathcal{D}$$

$\mathcal{I}(\nu,\mu)$, $\mathcal{O}(\nu,\mu)$ et $\mathcal{D}(\nu,\mu)$ étant les transformées de Fourier respectives des fonctions $I(x,y)$, $O(x,y)$ et $D(x,y)$.

La fonction $\mathcal{D}(\nu,\mu)$ est appelée "fonction de transmission du contraste" ou "fonction de transfert de modulation". Elle exprime la réponse en fréquences spatiales du système optique. Bien que des études aient fait intervenir des fonctions n'ayant pas cette propriété (58), on considère le plus souvent le cas de fonctions de transfert de modulation ayant une symétrie de révolution ; on les représente alors par une fonction d'une variable $\mathcal{D}(\rho)$.

B - Théorie des distributions

1°) - Définitions

Dans un certain nombre de problèmes de physique interviennent des fonctions représentant des densités de répartition de diverses grandeurs : répartition de masses, de charges électriques, d'efforts mécaniques, de probabilités, de fréquences etc... Du point de vue de la théorie classique des fonctions, on peut représenter des répartitions du type "continues par morceaux", mais on rencontre de sérieuses difficultés lorsque la grandeur étudiée se trouve concentrée en certains points, à plus forte raison dans des cas encore plus complexes tels que dipôles, quadripôles, feuillets, etc... La théorie des distributions due à L. SCHWARTZ (157) (158) (159) (160) fait de ces notions une synthèse logique et cohérente.

L'idée fondamentale est l'utilisation du "produit scalaire". Si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont deux fonctions et si l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \varphi(x)\ dx$$

existe, sa valeur est appelée produit scalaire de f et de φ et s'écrit $<f,\varphi>$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \varphi(x)\ dx = <f(x),\ \varphi(x)> = <f,\varphi>$$

on a également :

$$<f,\varphi> = \left[f * \overset{\vee}{\varphi}\right]_{x=0} \text{ ou } (f * \overset{\vee}{\varphi})\ (0)$$

Rappelons que $\overset{\vee}{\varphi}(x) = \varphi(-x)$

Une fonction de répartition n'intervient en fait que par son produit scalaire avec d'autres fonctions ; par exemple si f(x) représente une répartition de masses le long d'un axe, la masse totale s'exprime par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \langle f,1 \rangle ,$$

le moment des poids par rapport à l'origine, l'axe étant horizontal, par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,g\,f(x)\,dx = \langle f,xg \rangle ,$$

le moment d'inertie par rapport à l'origine, par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,x^2 dx = \langle f,x^2 \rangle$$

Une fonction de répartition apparaît donc comme une "fonctionnelle linéaire", c'est-à-dire une application linéaire d'un espace de fonctions dans un espace de nombres. Le principe de la théorie des distributions est le suivant : qu'une répartition soit ou non représentable par une fonction, on peut toujours définir l'application linéaire qui lui correspond, et que l'on appelle une "distribution". On représente souvent une distribution par la lettre T :

$$\langle T,\varphi \rangle = a$$

signifie qu'en appliquant la fonctionnelle T à la fonction φ, on obtient le nombre a.

Par exemple, l'"impulsion de Dirac" δ était définie en physique de la façon suivante :

$$\delta(x) \left| \begin{array}{ll} = 0 & \text{si } x \neq 0 \\ = +\infty & \text{si } x = 0 \end{array} \right.$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

ce qui, au sens ordinaire des fonctions, n'a pas de sens.

Au contraire la définition suivante :

$$< \delta, \varphi > \; = \varphi(0)$$

est parfaitement justifiable au point de vue logique. On définit aussi $\delta(x-a)$ ou $\delta_a(x)$:

$$< \delta_a, \varphi > \; = \varphi(a)$$

2°) - Quelques propriétés

Si f est une fonction, on a les relations :

$$< f' \; , \varphi > \; = - < f, \varphi' >$$

$$\text{et} \quad < \mathcal{F} f, \varphi > \; = < f, \mathcal{F}\varphi >$$

Pour une distribution T, on définit par analogie sa dérivée T' et sa transformée de Fourier $\mathcal{F}T$ de la façon suivante :

$$< T', \varphi > \; = - < T, \varphi' >$$

$$\text{et} \quad < \mathcal{F}T \; , \varphi > \; = < T, \mathcal{F}\varphi >$$

On définit ainsi les dérivées : δ' δ''... $\delta^{(n)}$ de l'impulsion de Dirac :

$$< \delta^{(n)} \; , \varphi > \; = < \delta, \varphi^{(n)} > \; = \varphi^{(n)} \; (0)$$

Des fonctions qui ne sont pas dans L^2 et qui n'ont pas de transformée de Fourier au sens des fonctions en ont une au sens des distributions. Par exemple :

$$\mathcal{F}\delta \; = 1$$

$$\mathcal{F}1 \; = \delta$$

$$\mathcal{F}\delta^{(n)} \; = (2i\pi\nu)^n$$

$$\mathcal{F}(x^n) \; = \frac{\delta^{(n)}(\nu)}{(2i\pi)^n}$$

3°) - Topologies

Dans les espaces de distributions on définit diverses topologies (152), mais leur caractère général est le suivant : la convergence au sens des distributions est beaucoup moins stricte qu'au sens des fonctions. Par exemple, la fonction

$$f_m(x) = a + b \cos mx$$

converge vers la fonction

$$f(x) = a$$

si $m \to \infty$, au sens des distributions et non au sens des fonctions. De même, une image photographique tramée à trame fine et une image à tons continus sont très voisines au sens des distributions, et aussi différentes qu'il est possible au sens des fonctions !

Sans entrer dans les complications inutiles, nous dirons qu'une suite de fonctions $f_m(x)$ converge vers une limite $f(x)$ au sens des distributions si, pour un ensemble E suffisamment vaste de fonctions $\varphi(x)$, on a :

$$\lim_{m \to \infty} \langle f_m, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in E$$

et nous écrirons :

$$f(x) = \lim_{m \to \infty} D \quad f_m(x)$$

De cette façon, l'impulsion de Dirac peut être considérée comme limite d'une fonction représentant une impulsion de plus en plus haute, de plus en plus étroite et d'intégrale constamment égale à 1 — limite au sens des distributions seulement car il n'y a en aucune façon convergence au sens des fonctions, même en moyenne quadratique. On peut prendre des impulsions de formes diverses : carrées, triangulaires, gaussiennes, etc... Par exemple, avec une impulsion carrée on a l'expression :

$$\delta(x) = \lim_{a \to 0} D \quad f_a(x) \text{ où } f_a(x) \begin{cases} = \frac{1}{a} & \text{si } |x| < \frac{a}{2} \\ = 0 & \text{si } |x| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

La formule suivante nous sera utile dans l'étude sur les fonctions d'appareil :

$$\delta(v) = \lim_{a \to \infty} D \quad \frac{\sin^2 \pi v a}{\pi^2 v^2 a} \qquad (II - 5)$$

La notion de distribution est dans un sens plus restreinte que celle de fonction : à une distribution peuvent correspondre plusieurs fonctions (une seule toutefois peut être continue). Elle est plus générale dans un autre sens : il existe des distributions auxquelles ne correspond aucune fonction.

C - Fonctions aléatoires stationnaires (161) (162) (163).

Un processus aléatoire est un phénomène physique de nature quelconque sur lequel on n'a que des renseignements donnés par des lois de probabilité. Il est représenté par une fonction dite "fonction aléatoire". Une fonction parfaitement connue est appelée "fonction certaine" une fonction aléatoire apparaît donc comme étant un ensemble de fonctions certaines (161, p.572-573). Par exemple, si le processus considéré est le bruit de fond d'une diode ayant des caractéristiques données et fonctionnant dans des conditions données, cet ensemble de fonctions est l'ensemble des bruits de fond de toutes les diodes possibles ayant les mêmes caractéristiques et fonctionnant dans les mêmes conditions.

Un processus aléatoire est dit "stationnaire" si ses propriétés statistiques restent inchangées lorsqu'on fait une translation de l'origine de la ou des variables (telles que temps ou coordonnées d'espace). C'est précisément le cas du bruit de fond électronique et de la granularité photographique. La granularité, qui est un processus à deux dimensions, est de plus isotrope, c'est-à-dire que ses propriétés statistiques sont les mêmes dans toutes les directions.

1°) - Moyennes, corrélation, autocorrélation

Pour une fonction aléatoire f(x), on définit différentes sortes de moyennes. On peut par exemple prendre un échantillon donné et faire la moyenne suivant la variable x :

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x)\, dx$$

ou encore faire la moyenne sur n échantillons pour une valeur donnée de x :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

Ce dernier type de moyenne est égal à la moyenne en probabilité ou "espérance mathématique" :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f \cdot p(f)\, df$$

$p(f)\, df$ étant la probabilité pour que la valeur de la fonction soit comprise entre f et f + df.

Le premier type de moyenne est désigné suivant les auteurs par $< f >$ ou $\overline{f}$; nous emploierons ici $\overline{f}$ pour ne pas confondre avec les produits scalaires et, comme nous l'avons vu plus haut, nous n'employons pas f^* mais f^* pour distinguer la quantité complexe conjuguée. L'espérance mathématique est désignée par $E(f)$.

Si le processus est stationnaire, nous avons :

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x)\, dx = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} \int_{\tau - L/2}^{\tau + L/2} f(x)\, dx$$

et $E\ f(x) = E\left[f(x + \tau)\right]$

Une autre propriété s'ajoute au caractère stationnaire : c'est ce que l'on appelle l'"ergodisme". On dit qu'un processus est ergodique si la moyenne $\overline{f}$ suivant la variable x est égale à la moyenne en probabilité $E(x)$. Ceci est vrai dans tous les cas usuels et nous admettons toujours dans la suite que la granularité photographique est un processus aléatoire stationnaire, isotrope et ergodique. Pour un tel processus on définit :

- la moyenne (ou "moment") du premier ordre :

$$\overline{f} \quad \text{ou} \quad E(f)$$

- les écarts ou fluctuations de la fonction par rapport à la valeur moyenne :

$$\Delta f(x) = f(x) - \overline{f}$$

- la moyenne ou moment du second ordre :

$$\overline{f^2} \quad \text{ou} \quad E(f^2)$$

- l'écart type σ, ou moyenne quadratique des fluctuations :

$$\sigma^2 = \overline{\Delta f^2} = E(\Delta f^2)$$

on écrit quelquefois $\sigma(f)$ ou σ_f. On a la relation :

$$\sigma^2 = \overline{(f - \bar{f})^2} = \overline{(f^2 - 2f\bar{f} + \bar{f}^2)} = \overline{f^2} - \overline{2f}^2 + \bar{f}^2$$

$$= \overline{f^2} - \bar{f}^2$$

La corrélation exprime qu'il existe une relation linéaire, d'autant plus étroite que sa valeur est plus grande, et d'autant plus approximative que sa valeur est plus petite, entre deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$:

$$R_{f_1 f_2} = \overline{f_1(x)\ f_2{}^*(x)} = E\left[f_1(x)\ f_2{}^*(x)\right]$$

On peut étudier une corrélation "à distance τ" et définir une "fonction de corrélation $R(\tau)$:

$$R_{f_1 f_2}(\tau) = \overline{f_1(x)\ f_2{}^*(x-\tau)} = E\left[f_1(x)\ f_2{}^*(x-\tau)\right]$$

On peut de cette façon considérer la corrélation à distance τ d'une fonction $f(x)$ avec elle-même, c'est la fonction d'autocorrélation :

$$R_f(\tau) = \overline{f(x)\ \ f^*(x-\tau)} = E\left[f(x)\ \ f^*(x-\tau)\right]$$

Différentes notations sont utilisées pour les fonctions de corrélation et d'autocorrélation. Nous emploierons exclusivement la notation utilisée par W.B. DAVENPORT et W.L. ROOT (162) : la fonction de corrélation est désignée par R, et la fonction f ou les fonctions f_1 et f_2 sont indiquées en indice. Nous y ajouterons ceci : nous appellerons R l'autocorrélation d'une fonction $f(x)$, et r l'autocorrélation des fluctuations par rapport à la valeur moyenne :

$$R_f(\tau) = \overline{f(x)\ f^*(x-\tau)}$$

$$r_f(\tau) = R_{\Delta f}(\tau) = \overline{\Delta f(x)\ \ \Delta f^*(x-\tau)}$$

On démontre les relations :

$$\left|\begin{array}{l} R_f(\tau) = |\bar{f}|^2 + r_f(\tau) \\ r_f(0) = \sigma_f^2 \\ r_f(\pm\infty) = 0 \\ \\ R_f(0) = \overline{|f|^2} \\ R_f(\pm\infty) = |\bar{f}|^2 \end{array}\right.$$

2°) - Spectre de Wiener

L'analyse en fréquences au moyen de la transformation de Fourier ne peut pas s'appliquer aux fonctions aléatoires stationnaires, d'une part en raison de leur caractère aléatoire et d'autre part parce qu'elles ne font pas partie de l'espace L. On emploie le "spectre de fréquences" , ou "spectre de puissance" ou "spectre de Wiener" qui ne donne pas de renseignements sur les phases mais représente seulement des carrés d'amplitudes. Il se définit comme étant la transformée de Fourier de l'autocorrélation (162, p. 103) :

$$S(\nu) = \mathcal{F}\, R(\tau)$$

On le définit quelquefois aussi par la formule suivante :

$$(II - 6) \qquad S(\nu) = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} \left| \int_{-L/2}^{L/2} f(x)\, e^{-2i\pi\nu x}\, dx \right|^2$$

mais cette définition mène à quelques difficultés. En effet, comme l'a montré J.L. DOOB (164, p. 497 et p. 530) cette expression ne converge pas, même en moyenne quadratique. Il y a en fait convergence au sens des distributions seulement, comme nous le verrons à propos des problèmes d'échantillonnage.

Si la fonction f(x) est à valeurs réelles, son autocorrélation est réelle et paire : il en est de même du spectre de Wiener. Si f(x) est à valeurs complexes, ceci reste vrai si ses propriétés statistiques sont inchangées lorsqu'on change x en - x (cette propriété est l'analogue à une dimension de ce qu'est l'isotropie à deux dimensions).

Nous appellerons $s(\nu)$ le spectre de Wiener des fluctuations $\Delta f(x)$. Nous avons les relations :

$$S(\nu) = \mathcal{F} R(\tau)$$

$$s(\nu) = \mathcal{F} r(\tau)$$

$$S(\nu) = \left|\overline{f}\right|^2 \delta(\nu) + s(\nu)$$

La fonction $S(\nu)$ présente une impulsion de Dirac à l'origine, sauf si $\overline{f} = 0$. La fonction $s(\nu)$, ainsi que la fonction $S(\nu)$ pour $\nu \neq 0$, est continue si le processus aléatoire représenté par $f(x)$ n'a aucune composante périodique; sinon on y trouve des impulsions de Dirac correspondant à ces composantes périodiques, mais dans cette étude nous ne rencontrerons pas ce dernier cas.

3°) - Systèmes linéaires

La propriété essentielle de l'autocorrélation et du spectre de Wiener est la suivante : si le signal, représenté par $f(\nu)$ passe dans un filtre linéaire dont la "réponse impulsionnelle" ou "réponse percussionnelle" (en électronique ou en mécanique) ou la "tache de diffusion (en optique) est $i(x)$, on obtient à la sortie une fonction $f(x)$ telle que :

$$g = f * i$$

(i est par définition la forme que prend g si $f = \delta$) et l'on a :

$$R_g = R_f * (i * \overset{\vee}{i})$$

$$S_g(\nu) = S_f(\nu) \left| I(\nu) \right|^2$$

où $I(\nu)$ est la transformée de Fourier de $i(x)$. La traversée d'un système linéaire a pour résultat de faire le produit du spectre du signal par la fonction de filtrage du système. A un signal sinusoïdal à l'entrée correspond un signal sinusoïdal de même fréquence à la sortie.

4°) - Somme de deux fonctions aléatoires à valeurs réelles.

Si on fait la somme de deux fonctions aléatoires stationnaires à valeurs réelles :

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

on a la relation

$$\sigma_f^2 = \sigma_{f_1}^2 + \sigma_{f_2}^2 + 2r_{f_1 f_2} \quad (0)$$

Si elles sont indépendantes, $r_{f_1 f_2} = 0$ et les écarts-types s'ajoutent quadratiquement :

$$\sigma_f^2 = \sigma^2 f_1 + \sigma^2 f_2$$

Pour les spectres de Wiener on a la relation :

$$S_f(\nu) = S_{f_1}(\nu) + S_{f_1}(\nu) + 2\, S_{f_1 f_2}(\nu)$$

La fonction $S_{f_1 f_2}(\nu)$ est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation $R_{f_1 f_2}(\tau)$. W.B. DAVENPORT et W.L. ROOT (162, p. 108-109) appellent cette fonction "cross spectral density".

Si les fonctions f_1 et f_2 sont indépendantes, $S_{f_1 f_2} = 0$ et les spectres deWiener s'ajoutent linéairement :

$$S_f(\nu) = S_{f_1}(\nu) + S_{f_2}(\nu)$$

5°) - <u>Systèmes non linéaires</u>

Dans l'étude sur l'échantillonnage, nous aurons besoin de savoir ce que devient le spectre d'un signal après traversée d'un système à réponse quadratique.

Lorsqu'il intervient des non-linéarités, à un signal sinusoïdal simple à l'entrée correspond un signal complexe à la sortie, composé d'un fondamental et d'harmoniques ; dans le cas d'un spectre continu la relation entre les spectres à l'entrée et à la sortie devient compliquée. Pour traiter le problème on doit d'une part faire intervenir des moments d'ordre supérieur à 2, et d'autre part connaître la répartition en probabilité des valeurs de la fonction.

Les choses se simplifient dans un cas particulier : celui du processus "gaussien" ou "laplacien" (162, p. 145-167) (161, p. 471-521) (209, p.4) où les valeurs de la fonction sont réparties statistiquement suivant une loi de Gauss ; il est dit "centré" si la moyenne du premier ordre est nulle. Les propriétés statistiques

d'un processus gaussien sont complètement définies par la connaissance des propriétés du premier et du second ordre ; si on connaît les moyennes du premier et du second ordre, on peut en déduire les moyennes de tous ordres.

Pour un processus gaussien centré représenté par une fonction f(x), on a la relation suivante, classique en théorie de la détection (162, p. 259) (163, p. 64) :

$$R_{f2}(\tau) = \sigma_f^4 + 2\left[R_f(\tau)\right]^2$$

ce qui nous donne :

$$r_{f2}(\tau) = 2\left[r_f(\tau)\right]^2$$

et pour le spectre de Wiener :

$$S_{f2}(\nu) = \sigma_f^4\,\delta(\nu) + 2\left[S_f(\nu)\right]^2$$

$$s_{f2}(\nu) = 2\left[Sf(\nu)\right]^2$$

Le processus étant centré, $S_f(\nu) = s_f(\nu)$:

$$s_{f2}(\nu) = 2\left[s_f(\nu)\right]^2$$

D - Loi de Poisson

Considérons une répartition aléatoire de points sur une droite. Appelons P(K,L) la probabilité pour qu'il y ait K points sur un intervalle de longueur L. On dit que les points sont répartis suivant un processus de Poisson si les conditions suivantes sont remplies :

1°) - Le processus est strictement "sans mémoire" c'est-à-dire que deux intervalles disjoints L et L' sont indépendants :

$$P(K,L\ ;\ K',L') = P(K,L)\,P(K',L') \qquad \forall L \atop \forall L' \vee L$$

2°) - Pour un élément de longueur dL, la probabilité P(1,dL) est un infiniment petit du 1er ordre proportionnel à dL :

$$P(1,dL) = \alpha\,dL$$

α peut dépendre de la position de l'élément dL (exemple : l'arrivée aléatoire des appels téléphoniques à un central, la probabilité varie avec l'heure). S'il n'en dépend pas, le processus est stationnaire ; il est également ergodique. Dans ce cas on démontre la formule suivante, dite "loi de Poisson" :

$$P(K,L) = \frac{(\alpha L)^K \, e^{-\alpha L}}{K!}$$

(Si K = 0 on doit prendre K! = 1)

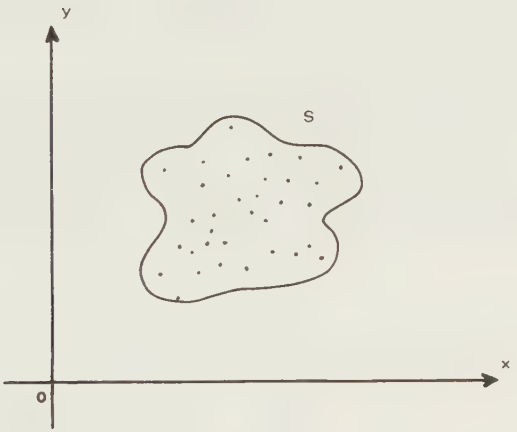


Fig.9

La loi de Poisson est également valable à plusieurs dimensions, deux par exemple (Fig.9). Si les conditions :

$$P(K,S\ ;\ K',S') = P(K,S)\ P(K',S') \qquad \forall\ S \quad \forall\ S' \vee S$$

et $\qquad P(1,dS) = \alpha dS$

sont remplies, et si α = cte, on a la relation :

$$P(K,S) = \frac{(\alpha S)^K \, e^{-\alpha S}}{K!} \qquad \text{(II - 7)}$$

Le nombre moyen de points par unité de surface est égal à α.

E - Equations intégrales (165) (166) (167) (168) (169).

1°) - Définitions

Une équation est dite "fonctionnelle" si l'inconnue est une fonction. Il en existe divers types tels que les équations différentielles, aux différences finies, intégrales, intégro-différentielles, etc... Une équation fonctionnelle est appelée "équation intégrale" si la fonction inconnue apparaît sous un ou plusieurs signes d'intégration. Elle est dite linéaire si elle est de la forme :

$$L\left[f(y)\right] = g(x)$$

où $f(y)$ est la fonction inconnue, $g(x)$ une fonction connue, et L une transformation faisant intervenir une intégration et telle que :

$$L\left[\lambda_1 f_1(y) + \lambda_2 f_2(y)\right] = \lambda_1 L\left[f_1(y)\right] + \lambda_2 L\left[f_2(y)\right]$$

Les formes les plus importantes d'équations intégrales linéaires sont les équations "de première espèce" :

$$\int_a^b K(x,y)\, f(y)\, dy = g(x) \qquad (II - 8)$$

et les équations "de deuxième espèce" :

$$f(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\, f(y)\, dy = g(x)$$

où λ est une constante à déterminer, dite "valeur propre". Si $g(x) \equiv 0$, l'équation de deuxième espèce est dite "homogène".

La théorie des équations intégrales a été amorcée au siècle dernier par ABEL et par LIOUVILLE, puis perfectionnée plus récemment par I. FREDHOLM, V. VOLTERRA, J. HADAMARD.

La fonction de deux variables $K(x,y)$ est appelée "noyau" de l'équation. Si les deux bornes d'intégration a et b sont des constantes, l'équation est dite "de Fredholm" ; si l'une d'elles est égale à $\pm x$, l'équation est dite "de Volterra".

2°) - Exemple : l'intégrale d'Abel

La transformation intégrale d'Abel se définit de la façon suivante :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) dy$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$g(x) = \int_{x}^{+\infty} \frac{r f(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr$$

Cette transformation se rencontre à propos de divers problèmes de physique, en particulier lorsque le phénomène étudié a une symétrie cylindrique (170) (171) (172) (173) (174) (175) (176). Si la fonction $g(x)$ est connue et si $f(r)$ est inconnue, nous avons à résoudre une équation de Volterra de première espèce. C'est là un exemple classique d'équation intégrale et la solution en est connue.

Appelons A la transformation qui donne g à partir de f :

$$g = A f$$

et appelons $\varphi(x)$ la fonction telle que :

$$f = A\varphi$$

Nous avons donc :

$$g = A.\ A\varphi = A^2\varphi$$

ce qui s'écrit :

$$g(x) = \int_{x}^{+\infty} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \left[\int_{r}^{+\infty} \frac{u}{\sqrt{u^2 - r^2}} \varphi(u)\, du \right] dr$$

Nous pouvons poser :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad \text{si} \quad |x| < |r|$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad |x| > |r|$$

(Re = partie réelle de)

ce qui nous donne :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} r \ \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) \left[\int_0^{+\infty} u \ \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{u^2 - r^2}}\right) \varphi(u) \ du \right] dr$$

En intervertissant l'ordre des intégrations et en effectuant nous obtenons finalement :

$$g(x) = 2\pi \int_x^{+\infty} u \ \varphi(u) \ du$$

Dérivons :

$$\frac{dg(x)}{dx} = -2\pi \ x \ \varphi(x)$$

d'où :

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\pi} \ \frac{1}{x} \ \frac{dg(x)}{dx}$$

d'où l'on déduit :

$$f(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{+\infty} \frac{\frac{dg(x)}{dx}}{\sqrt{x^2 - r^2}} \ dx \qquad (II - 9)$$

Cette dernière formule est la formule d'inversion de l'intégrale d'Abel.

III - EXPRESSIONS MATHEMATIQUES DE LA GRANULARITE

A - Représentation de la granularité par une fonction aléatoire.

Pour étudier la granularité, on considère un échantillon de film développé après avoir été exposé uniformément : il n'y a pas d'image et l'on voit seulement la granulation du film, qui se traduit par des variations locales de transmission. D'où l'idée de représenter la granularité par la fonction $T(x,y)$, exprimant la transmission en fonction du point.

En vue d'avoir une définition correcte, nous allons être amenés à préciser certains points. Si l'on suppose l'émulsion infiniment mince, on peut raisonner de la façon suivante : dans le plan de l'échantillon, le rayonnement incident est représenté par la fonction complexe $a_o(x,y,t)$. Après traversée de l'échantillon, on a la fonction $a(x,y,t)$:

$$a(x,y,t) = a_o(x,y,t) \cdot \Theta(x,y) \qquad (III - 1)$$

où $\Theta(x,y)$ est une fonction à valeurs complexes que l'on peut appeler la "transparence complexe" de l'échantillon. On définit alors la transmission $T_o(x,y)$ comme étant le carré du module de la transparence complexe :

$$T_o(x,y) = \left|\Theta(x,y)\right|^2$$

La fonction $T_o(x,y)$ ainsi définie est caractéristique du film. Mais, pour étudier la transmission en fonction du point, on emploie en fait un appareil de mesure dont les caractéristiques influent sur la fonction mesurée: d'une part on intègre le rayonnement transmis sur une petite surface qui est la "tache d'exploration" de l'appareil ; d'autre part des phénomènes de diffraction et de diffusion interviennent et le résultat des mesures dépend de la géométrie des systèmes optiques utilisés. On définit donc une transmission T mesurée avec un appareil donné comprenant un système optique d'éclairage et un système optique de mesure avec un récepteur photoélectrique (Fig. 10) :

- en l'absence de l'échantillon, le récepteur photoélectrique reçoit un flux lumineux ϕ_o.

- l'échantillon étant en place, il reçoit un flux ϕ , et la transmission se définit comme le rapport des flux ϕ et ϕ_o :

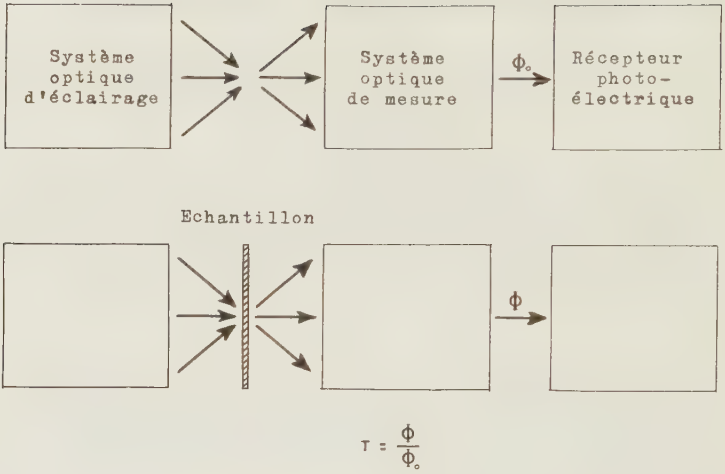


Fig. 10 - Définition de la transmission

Fig. 11- Emulsion développée vue en coupe (G = 500)

$$T = \frac{\phi}{\phi_0}$$

Si l'on déplace la zone explorée de l'échantillon, (x,y) étant les coordonnées du centre de cette zone, on définit une transmission T(x,y) fonction du point.

En réalité l'échantillon n'est pas infiniment mince (Fig. 11) ; son épaisseur est généralement de l'ordre de 12 microns pour les émulsions photographiques en noir et blanc, et de 20 microns pour les émulsions radiographiques. La tache d'exploration a une structure à trois dimensions qui dépend des ouvertures numériques des systèmes d'éclairage et de mesure. Dans ces conditions, la fonction T(x,y) se définit comme précédemment, mais on ne peut plus écrire une relation aussi simple que la relation (III - 1) entre les fonctions $a_0(x,y,t)$ et $a(x,y,t)$ à l'entrée et à la sortie de l'échantillon : l'épaisseur de l'émulsion, en effet, est égale à plusieurs dizaines de fois la longueur d'onde. En toute rigueur, on ne peut plus définir une fonction $\Theta(x,y)$. Cependant, l'hypothèse que l'émulsion est très mince se révèlera fructueuse pour étudier, dans une première approximation, l'effet Callier et les fonctions d'appareil.

Les fonctions $\Theta(x,y)$, $T_0(x,y)$ et $T(x,y)$ sont des fonctions aléatoires de deux variables ; elles sont stationnaires, isotropes et ergodiques.

B - Granularité quadratique moyenne, Selwyn et syzygétique.

La première grandeur que l'on pense à utiliser pour étudier les propriétés statistiques de cette fonction aléatoire T(x,y) est son écart type σ_T. C'est ce que nous appellerons "granularité quadratique moyenne". Le terme anglais est "root-mean-square granularity" ou "R.M.S. granularity".

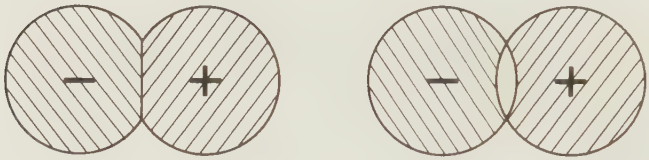
La "granularité Selwyn" est obtenue en multipliant la granularité quadratique moyenne σ_T par la racine carrée du double de l'aire A de la tache d'exploration :

$$G = \sigma_T \sqrt{2A}$$

Lorsqu'on étudie la granularité Selwyn, on emploie généralement une tache circulaire. Si R est le rayon de cette tache :

$$G = \sigma_T \sqrt{2\pi R^2}$$

D'après la loi de Selwyn, sur laquelle nous reviendrons au chapitre IX , la valeur de G ne dépend pas de A ou de R.



a - Tache d'exploration de JONES et HIGGINS

b - Tache d'exploration de CLARK-JONES

Fig. 12

La granularité syzygétique est obtenue avec deux taches d'exploration de rayon R et distantes de $R\sqrt{3}$, comme les cercles circonscrits à deux hexagones réguliers adjacents, éléments d'un pavage. On appelle "différence de transmission syzygétique" $S\Delta T$ la différence entre les transmissions obtenues avec ces deux taches. L'appareil construit par L.A. JONES et G.C.HIGGINS (39) employait en fait les deux taches que représente la Fig.12a et mesurait la valeur absolue moyenne de $S\Delta T$. Pour rendre l'étude théorique plus facile, R. CLARK-JONES (71) a supposé que les taches sont comme le montre la Fig.12b et a remplacé la valeur absolue moyenne par la valeur quadratique moyenne ; il définit la "granularité syzygétique" comme étant le produit de cette valeur quadratique moyenne par $\sqrt{2A}$, A étant l'aire hachurée sur la Fig.12b :

$$Z = \sigma_{S\Delta T} \sqrt{2A}$$

où $A = 2\pi \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right) R^2$

CLARK-JONES a démontré que, lorsque la loi de Selwyn est vérifiée pour la granularité Selwyn G, elle l'est aussi pour la granularité syzygétique Z et que, avec la définition que nous venons de voir, G = Z.

C - Autocorrélation et spectre de Wiener

La fonction aléatoire T(x,y) étant stationnaire et ergodique, on peut définir sa fonction d'autocorrélation $R(\tau, \tau')$ ou $r(\tau, \tau')$. En raison de l'isotropie du phénomène, la fonction d'autocorrélation a une symétrie de révolution :

$$R(\tau, \tau') = R(\theta) \quad \text{où} \quad \theta = \sqrt{\tau^2 + \tau'^2}$$

On a bien entendu :

$R(0) = \overline{T^2}$ $\qquad$ $r(0) = \sigma_T^2$

$R(\infty) = \bar{T}^2$ $\qquad$ $r(\infty) = 0$

Le spectre de Wiener $S(\nu,\mu)$ ou $s(\nu,\mu)$ est la transformée de Fourier à deux dimensions de l'autocorrélation. En vertu de ce que nous avons vu au chapitre II, sa méridienne $s(\rho)$ est la transformée de Hankel d'ordre zéro de celle de l'autocorrélation. Nous avons donc les relations :

$$s(\nu,\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau, \tau') \; e^{-2i\pi(\nu\tau + \mu\tau')} \; d\tau \; d\tau'$$

$$r(\tau,\tau') = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\nu,\mu) \; e^{2i\pi(\nu\tau + \mu\tau')} \; d\nu \; d\mu$$

et

$$s(\rho) = 2 \int_{0}^{+\infty} \theta \; r(\theta) \; J_0 (2\pi \rho \theta) \; d\theta$$

$$r(\theta) = 2 \int_{0}^{+\infty} \rho \; s(\rho) \; J_0 (2\pi \rho \theta) \; d\rho$$

avec $\qquad R(\tau, \tau') = \bar{T}^2 + r(\tau, \tau')$

et $\qquad S(\nu, \mu) = \bar{T}^2 \; \delta(\nu, \mu) + s(\nu,\mu)$

La méridienne $s(\rho)$ nous donne un moyen de représentation du spectre de Wiener de granularité par une fonction d'une variable. Il existe un autre moyen qui est fourni par l'exploration microdensitométrique, l'échantillon de film étant balayé suivant une ligne droite. On étudie ici une fonction d'une seule variable, $T(x,y_o)=T(x)$: cette fonction a une autocorrélation et un spectre de Wiener. On peut facilement démontrer que l'autocorrélation de $\Delta T(x)$ est égale à la méridienne $r(\theta)$; on en déduit (177) (178) (179) la relation suivante entre la fonction $s(\nu)$ et le spectre de Wiener $\phi(\nu)$ de $\Delta T(x)$:

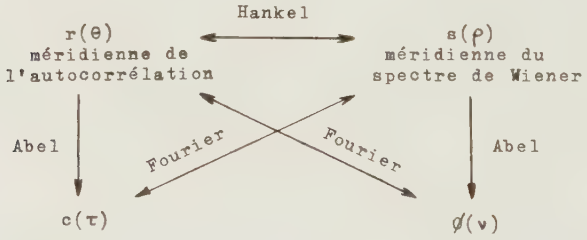
$$\phi(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} s\left(\sqrt{\nu^2 + \mu^2}\right) d\mu$$

La relation qui donne $\phi(\nu)$ à partir de $s(\rho)$ est donc une intégrale d'Abel, que l'on sait inverser comme nous l'avons vu au chapitre II :

$$\phi(\nu) = 2 \int_{\nu}^{+\infty} \frac{s(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - \nu^2}} \, d\rho$$

$$s(\rho) = -\frac{1}{\pi} \int_{\rho}^{+\infty} \frac{\frac{d\phi}{d\nu}}{\sqrt{\nu^2 - \rho^2}} \, d\nu$$

La fonction $r(\theta)$ a pour transformée de Fourier $\phi(\nu)$ et pour transformée de Hankel $s(\rho)$; $\phi(\nu)$ est la transformée d'Abel de $s(\rho)$. Si par ailleurs nous appelons $c(\tau)$ la transformée d'Abel de $r(\theta)$, nous avons le tableau suivant :



Nous avons d'autre part les formules :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(\nu,\mu) \, d\nu d\mu = \int_{o}^{+\infty} s(\rho) \, 2\pi\rho \, d\rho = r(\theta) = \sigma_T^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\nu)\ d\nu = r(\theta) = \sigma_T^2$$

D - Remplacement de la transmission par la densité.

Au lieu de la transmission T(x,y), on peut employer la densité D(x,y), cologarithme de la transmission :

$$D(x,y) = -\log_{10} T(x,y) = \log_{10} \frac{\phi_o}{\phi(x,y)}$$

La densité D(x,y) est également une fonction aléatoire stationnaire, isotrope et ergodique, pour laquelle on peut définir écart-type, autocorrélation et spectre de Wiener comme pour la transmission. On peut définir également la granularité Selwyn et syzygétique en partant de la densité au lieu de la transmission : c'est même ce qu'avaient fait à l'origine SELWYN, JONES et HIGGINS. Si les variations de transmission et de densité sont faibles par rapport à la valeur moyenne, on peut écrire :

$$D(x,y) \simeq 0,4343 \quad \frac{\Delta T(x,y)}{\overline{T}}$$

ce qui donne :

$$\sigma_D \simeq \frac{0,4343}{\overline{T}} \quad \sigma_T$$

$$r_D(\tau,\tau') \simeq \left[\frac{0,4343}{\overline{T}}\right]^2 r_T(\tau,\tau')$$

$$s_D(\nu,\mu) \simeq \left[\frac{0,4343}{\overline{T}}\right]^2 s_T(\nu,\mu)$$

La transmission moyenne $\overline{T}$ ne dépend pas de la dimension de la tache d'exploration alors que la densité moyenne $\overline{D}$ en dépend. D'autre part, les relations intégrales que nous verrons au chapitre VIII ne sont rigoureuses que pour la transmission ; pour la densité elles sont approchées, valables seulement si les fluctuations sont petites. Pour une étude théorique il est donc préférable d'employer la transmission.

Avec la densité cependant, la gamme de valeurs numériques dans laquelle se trouvent les résultats est moins étendue qu'avec la transmission. D'autre part σ_D augmente indéfiniment avec la densité de l'échantillon alors que σ_T passe par un maximum. Pour des mesures pratiques il est préférable d'employer la densité car les résultats sont alors plus "parlants".

L'appareil que nous allons décrire au chapitre suivant travaille en transmission. Il mesure σ_T et $\phi_T(\nu)$; il pourrait mesurer σ_D et $\phi_D(\nu)$ s'il était muni d'un amplificateur logarithmique, ce qui n'est pas le cas. Nous appellerons par convention σ_D et $\phi_D(\nu)$ les quantités:

$$\frac{0,4343}{\bar{T}} \quad \sigma_T$$

et

$$\left[\frac{0,4343}{\bar{T}}\right]^2 \phi_T(\nu)$$

ce qui est une approximation. Ce sont ces quantités qui seront exprimées lorsque nous donnerons des résultats numériques. Pour σ_D , ϕ_D , s_D , etc...,définis de cette façon, les relations du chapitre VIII sont rigoureuses comme elles le sont pour σ_T , ϕ_T , s_T , etc....

E - Equations aux dimensions

Dans cette étude apparaissent des autocorrélations et des spectres de Wiener des fonctions d'une et de deux variables, avec des relations assez compliquées entre elles. Il est donc utile de préciser les dimensions des quantités utilisées et les unités dans lesquelles seront exprimés les résultats.

La transmission et la densité sont des quantités sans dimension. L'autocorrélation de la transmission ou de la densité a les dimensions du carré d'une transmission ou d'une densité : c'est donc une quantité sans dimension.

Une fréquence spatiale a les dimensions de l'inverse d'une longueur. Pour le spectre de Wiener deux cas se présentent :

1°) - Si on considère le spectre d'une fonction d'une seule variable tel que $\phi(\nu)$, spectre de $T(x)$, ce spectre a les dimensions d'une longueur, comme on peut le vérifier au moyen de la formule :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\nu)\, d\nu = \sigma_T^2$$

2°) - Le spectre d'une fonction de deux variables tel que $s(\nu,\mu)$, spectre de $T(x,y)$, a les dimensions du carré d'une longueur :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(\nu,\mu)\, d\nu\, d\mu = \sigma_T^2$$

La fonction $c(\tau)$ a les dimensions d'une lon - gueur. En résumé nous avons :

$[T] = 1$
$[D] = 1$
$[G] = L$
$[Z] = L$
$[r] = 1$
$[c] = L$
$[\phi] = L$
$[s] = L^2$

Pour les fréquences spatiales, l'unité généralement employée est la période par millimètre ou mm^{-1}. Les longueurs seront en millimètres, ou converties en millimètres pour les calculs si elles sont en microns. Les spectres de Wiener de fonctions d'une variable seront en transmission^2 (ou densité^2) par mm^{-1} , c'est-à-dire en mm; les spectres de Wiener de fonctions de deux variables seront en transmission^2 (ou densité^2) par $(mm^{-1})^2$, c'est-à-dire en mm^2. Dans ces conditions les valeurs numériques obtenues sont assez faibles : pour les rendre plus maniables, on multipliera généralement les valeurs de σ_D par 10^3 et les valeurs de ϕ_D par 10^6.

F - Modèles statistiques

Comme nous l'avons vu au chapitre I, différents auteurs ont étudié des modèles statistiques, démontrant des formules qui donnent l'autocorrélation et le spectre de Wiener pour une tache d'exploration infiniment petite, en partant d'hypothèses données sur la forme, la dimension et l'arrangement des grains d'argent dans l'émulsion développée. Un assez grand nombre de facteurs entrent en jeu, tels que :

- la forme compliquée et enchevêtrée des grains (Fig. 2).

- l'épaisseur de l'émulsion.

- la diffusion de la lumière par les grains et par la surface de l'émulsion.

- la tendance des grains à s'agglomérer en amas.

Différents modèles statistiques sont possibles, suivant les facteurs que l'on considère et ceux qu'on laisse de côté, et les méthodes de calcul qu'on peut employer sont assez diverses. Nous allons citer ici quelques résultats de modèles statistiques, et nous verrons au chapitre V de quelle façon on peut faire intervenir l'agglomération des grains.

Les études faites par E.W.H. SELWYN (34), par W.J. ALBERSHEIM (35) et par H. SIEDENTOPF (36) sont déjà des modèles statistiques, mais qui ne rendent compte que de la moyenne quadratique et non du spectre de Wiener.

1°) - Modèle simplifié de CLARK-JONES (71)

Les grains sont supposés circulaires, tous de même dimension et répartis au hasard dans une émulsion infiniment mince ; l'effet des recouvrements de grains est négligé, ce qui fait que ce modèle n'est valable que si la densité est faible. La formule donnée par CLARK-JONES est la suivante :

$$s(\rho) = 0{,}4343\ \pi\ a\ \overline{D}\ Q \left[\frac{J_1\ (2\pi a \rho\ )}{\pi a \rho} \right]^2$$

où a est le rayon des grains, $\overline{D}$ la densité moyenne, (1-Q) la transmission des grains, que CLARK-JONES suppose pouvoir être différente de 1.

N.B. Il semble que cette formule comporte une petite erreur : en refaisant le calcul nous avons trouvé :

$$s(\rho) = \frac{\pi}{0{,}4343}\ a\ \overline{D}\ Q \left[\frac{J_1\ (2\pi a \rho\ )}{\pi a \rho} \right]^2 \qquad \text{(III - 2)}$$

2°) - Modèles de PICINBONO et de SAVELLI

Plus compliqués sont les modèles de B. PICINBONO et de M. SAVELLI. Ces modèles tiennent compte des recouvrements, et aussi du fait que les grains ne sont pas tous de même dimension. Dans ces modèles c'est la méridienne de l'autocorrélation qui est calculée ; le spectre de Wiener s'en déduit par une transformation de Hankel. Nous emploierons ici les notations suivantes : a pour le rayon des grains, d pour le nombre moyen de grains par unité de surface.

B. PICINBONO (85) obtient les formules suivantes :

$$\overline{T} = \exp\left\{ - 2\pi a \int_0^{+\infty} \left[1 - p(a) \right] a \, da \right\}$$

$$R(\tau) = \exp\left\{ - 4d \left(\pi \int_0^{\tau/2} \left[1 - p(a) \right] a da + \int_{\tau/2}^{+\infty} \left[\pi - \text{Arc cos } \frac{\tau}{2a} \right] \right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots \left[1 - p(a) \right] a da \right) \right\}$$

où p(a) est la probabilité pour que le rayon d'un grain d'argent soit compris entre 0 et a.

Bien entendu, $r(\tau) = R(\tau) - \overline{T}^2$

Si les grains sont tous de même rayon a_o :

$p(a) = 0$ si $a < a_o$

$p(a) = 1$ si $a > a_o$

et l'on obtient :

$$\overline{T} = e^{-\pi a_o^2 d}$$

$$R(\tau) = \exp - 2a_o^2 d \left(\pi - \text{Arc cos } \frac{\tau}{2a_o} - d\tau \sqrt{a_o^2 - \tau^2/4} \right. \qquad \text{(III - 3)}$$

si $\tau < 2a_o$

$$= e^{-2\pi a_o d} \quad \text{si} \quad \tau > 2a_o$$

M. SAVELLI (74) suppose, comme CLARK-JONES, que les grains peuvent avoir une transmission non nulle qu'il appelle h_1 et il désigne par h_2 la transmission de la gélatine. Il utilise les fonctions caractéristiques

pour faire le calcul. La formule générale est compliquée ; nous donnerons le résultat dans le cas particulier où tous les grains ont le même rayon a_o :

$$T = h_1 \, e^{-\pi d a_o^2 (1-h_2)}$$

$$r(\tau) = h_1^2 \left[e^{-2\pi d a_o^2 (1-h_2)} \, e^{d a_o (\pi - 2\beta)(1-h_1^2)} - 1 \right]$$

où $\beta = \text{Arc sin} \frac{\tau}{2a_o} + \frac{\tau}{2a_o} \sqrt{1 - \frac{2}{4a_o^2}}$ si $\tau < 2a_o$

$= \frac{\pi}{2}$ si $\tau > 2a_o$

Si l'on fait $h_1 = 0$ et $h_2 = 1$, on obtient des équations équivalentes aux équations (III - 2).

IV - DESCRIPTION ET ETUDE DE L'APPAREIL

L'appareil est du type microdensitométrique. L'échantillon de film est animé d'un mouvement de rotation et est exploré suivant une circonférence ; les variations de transmission se traduisent par des variations du flux lumineux reçu par un photomultiplicateur. Le signal électrique obtenu est analysé par des moyens électroniques. La Fig. 13 représente un schéma de principe, la Fig. 14 une photo d'ensemble et la Fig. 15 une vue de détail montrant le porte-échantillon, le moteur et les microscopes.

A - Partie optique et mécanique

Cette partie de l'appareil est montée sur un banc d'optique Jobin et Yvon. La source de lumière ne doit avoir aucune variation de luminance dans le temps, ce qui interdit l'emploi des lampes à arc ; on a choisi une lampe à ruban de tungstène Philips 6V/16-17A type PR 56, alimentée en courant continu stabilisé. Devant la lampe sont placés : un condenseur avec verre anticalorique, éventuellement des densités neutres, un diaphragme dit "diaphragme d'éclairage". Plusieurs types de diaphragmes peuvent être utilisés : fixes ou réglables, circulaires ou rectangulaires; un premier microscope dit "microscope d'éclairage" forme sur l'échantillon l'image de ce diaphragme.

Le porte-échantillon est fixé sur un roulement torique de haute précision "Machines-Outils" dont le jeu dans toutes les directions ne dépasse pas 2 microns. Il est entraîné, par l'intermédiaire d'une courroie plate, par un moteur à circuits imprimés Servalco. Les avantages de ce type de moteur sur les moteurs usuels à courant alternatif sont les suivants : absence quasi-totale de vibrations en dessous de 1000 t/mn, et couple élevé aux faibles vitesses. Ceci permet d'obtenir une gamme de vitesses très étendue en faisant varier la tension d'alimentation : 10 à 200 t/mn pour le porte-échantillon, avec un rapport de réduction de 1/5 et un volant en fonte pour régulariser le mouvement du moteur.

L'ensemble formé par le moteur et le porte-échantillon est porté par une glissière à rouleaux croisés Schneeberger. Une vis de palmer permet de régler le diamètre de la circonférence explorée, en faisant varier la distance entre l'axe de rotation du roulement et l'axe du système optique. Un tambour gradué en 100 divisions est solidaire de la vis, et un compteur indique le nombre de tours. Le pas de vis est 0,5 mm : on obtient donc une lecture directe en millimètres sur le compteur et en 1/100 de mm sur le tambour. Il existe trois porte-échantillons interchangeables, dont les ouvertures font respectivement 20, 40 et 80 mm de diamètre.

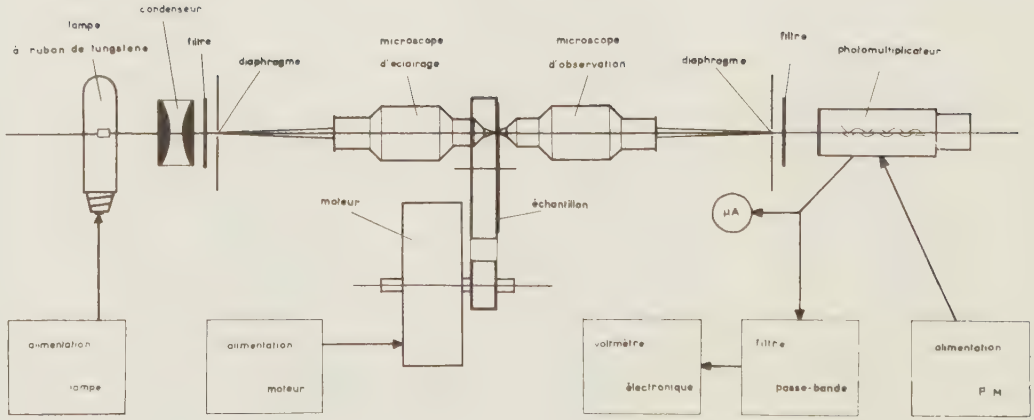


Fig. 13 - Schéma d'ensemble de l'appareil

Le moteur est placé en porte-à-faux et produit un couple de torsion sur le banc d'optique. Ce couple de torsion est équilibré par une colonne contenant un ressort, visible sur la Fig.14 . La tension du ressort est réglable par rotation d'une bague.

Le deuxième microscope appelé "microscope de mesure" forme l'image de l'échantillon sur le diaphragme de mesure. Pour ce microscope on utilise des objectifs métallographiques et c'est de ce côté qu'est placée l'émulsion de l'échantillon, ceci afin d'avoir la meilleure correction des aberrations géométriques. Le même type de jeu de diaphragmes est employé du côté mesure. Derrière le diaphragme de mesure est placé un photomultiplicateur. Entre les microscopes et les diaphragmes des soufflets d'appareil photographique assurent l'étanchéité à la lumière extérieure.

B - Partie électronique

Cette partie comprend tout d'abord les alimentations stabilisées du moteur, de la lampe et du photomultiplicateur. Elle comprend d'autre part le dispositif d'analyse du signal : un voltmètre indique la tension donnée par une dynamo tachymétrique calée sur l'arbre du moteur ; il est directement gradué en t/mn de l'échantillon. Un microampèremètre mesure le courant anodique moyen du photomultiplicateur. Le signal est examiné sur l'écran d'un oscilloscope et il est envoyé dans un filtre passe-bande réglable et dans un voltmètre électronique à valeur efficace.

C - Mesures de granularité

Nous allons donner les relations approchées qui permettent d'obtenir la granularité quadratique moyenne et le spectre de Wiener. Appelons :

R : la résistance de charge du photomultiplicateur (Fig. 16)
V : la tension aux bornes de cette résistance
$\overline{I}$: le courant anodique moyen
$\overline{T}$: la transmission moyenne de l'échantillon mesurée dans les conditions définies par l'ouverture numérique des objectifs.
$\sigma(T)$: la moyenne quadratique des fluctuations de transmission
$\sigma(D)$: la moyenne quadratique des fluctuations de densité
$\sigma(V)$: la tension efficace mesurée au voltmètre électronique

Le photomultiplicateur est linéaire si le courant anodique ne dépasse pas 30µA. Si cette condition est vérifiée, on a la relation simple suivante :

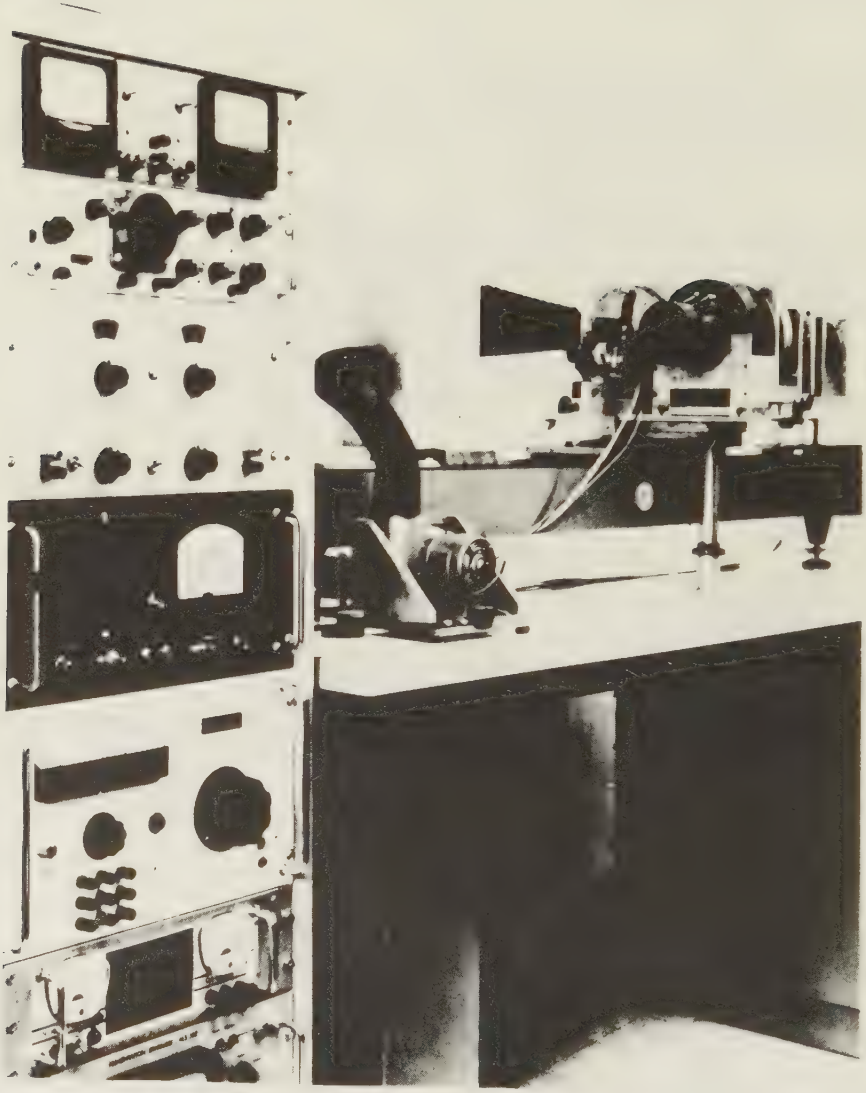


Fig. 14 - Vue d'ensemble de l'appareil

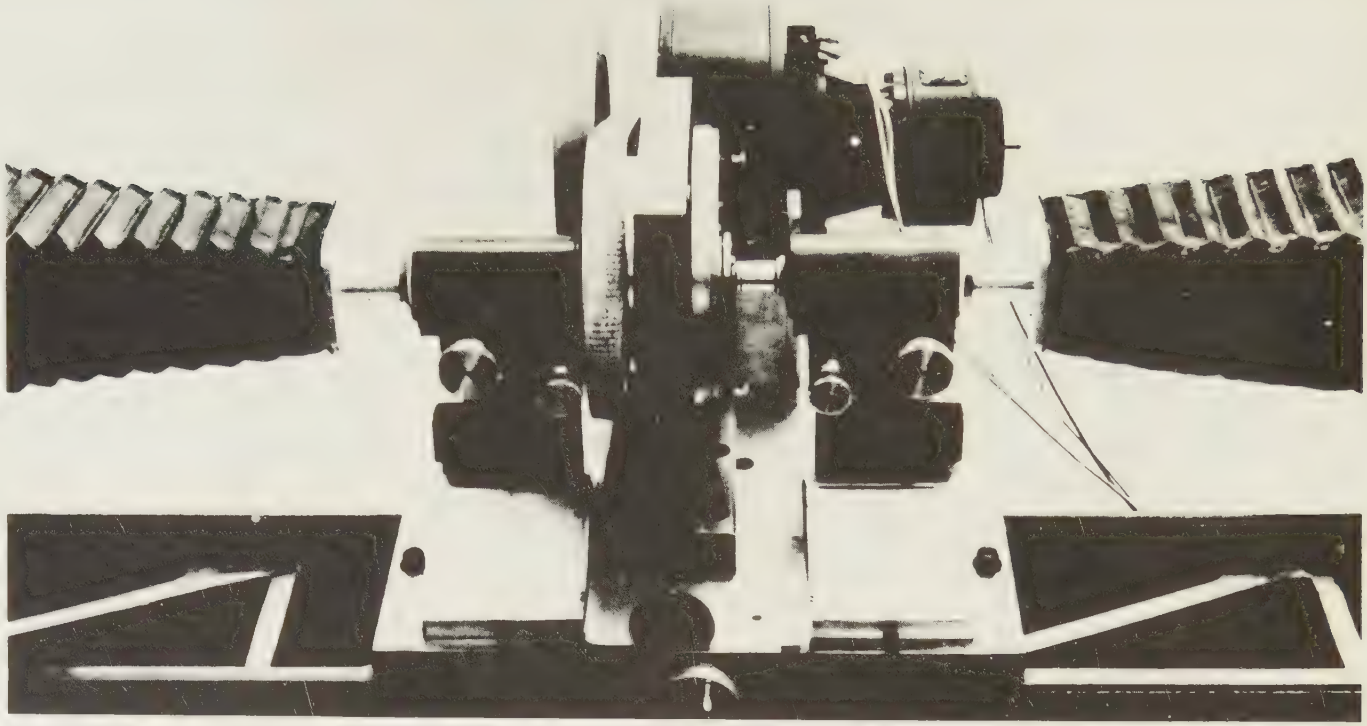


Fig. **15** - Vue de détail montrant les microscopes, le moteur et le porte-échantillon

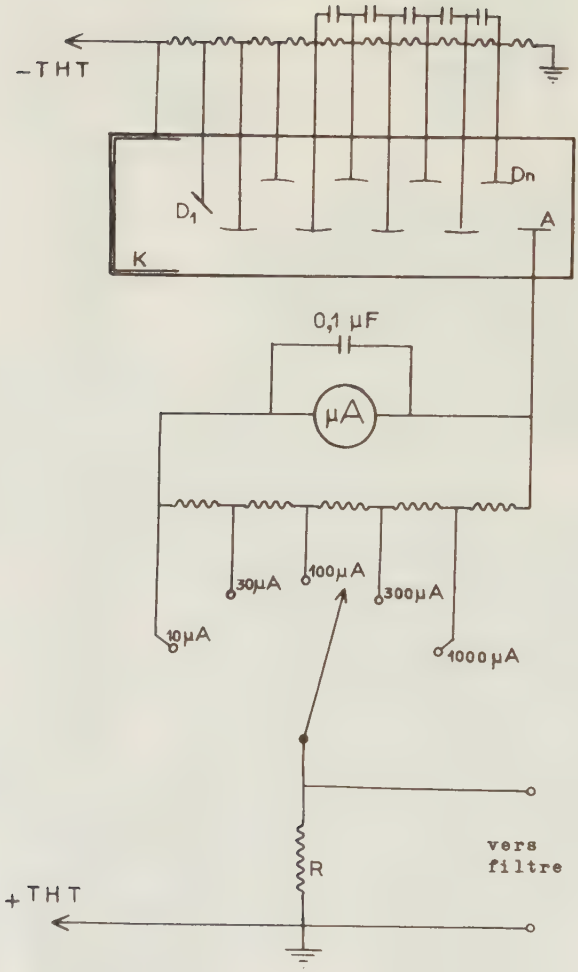


Fig. 16 - Circuit électrique du photomultiplicateur

$$\frac{\sigma(T)}{\overline{T}} = \frac{\sigma(V)}{\overline{V}} = \frac{\sigma(V)}{R\,\overline{I}}$$

Comme nous l'avons vu au chapitre III , nous écrirons :

$$\frac{\sigma(D)}{0,4343} = \frac{\sigma(T)}{\overline{T}} = \frac{\sigma(V)}{R\,\overline{I}}$$

Pour mesurer la granularité quadratique moyenne on règle le filtre sur une bande passante large. Pour mesurer le spectre de Wiener on règle le filtre sur une bande passante étroite. En vertu de la relation suivante :

$$f = \nu\, v$$

où ν est la fréquence spatiale dans l'échantillon, f la fréquence temporelle qui lui correspond pour une vitesse linéaire d'exploration v, on explore le spectre de fréquences spatiales en faisant simplement varier la vitesse v. On admet que la circonférence explorée a un rayon suffisamment grand pour pouvoir être assimilée à une ligne droite et on mesure donc un spectre de Wiener du type que nous avons appelé $\phi_T(\nu)$ au chapitre précédent. Deux spectres de Wiener interviennent ici :

- le spectre s(f) des fluctuations de tension $\Delta V(t)$

- le spectre $\phi_T(\nu)$ des fluctuations de transmission $\Delta T(x)$.

Nous avons les relations :

$$\Delta T = \frac{\overline{T}}{R\,\overline{I}}\ \Delta V$$

et $x = vt$

Or les dimensions du spectre de Wiener d'une fonction F(X) sont F^2X, donc nous avons :

$$\phi_T = \left(\frac{\overline{T}}{R\,\overline{I}}\right)^2 v \cdot s$$

La tension efficace mesurée $\sigma(V)$ est donnée par :

$$\sigma^2(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(f)\, s(f)\, df$$

où G(f) est le gain en tension du filtre. Si A est la valeur de l'intégrale :

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(f)\, df$$

et si la bande passante du filtre autour de la fréquence centrale f_o n'est pas trop large, nous pouvons écrire approximativement :

$$\sigma^2(V) \simeq A\, s(f_o)$$

et nous avons finalement :

$$\phi_T = \frac{\overline{T}^2 v}{AR^2\overline{I}^2}\ \sigma^2(V)$$

$$v = f_o/v$$

Ces deux formules nous permettent de mesurer le spectre de Wiener $\phi_T(v)$. Pour le spectre de la densité nous avons :

$$\phi_D = \frac{\overline{0,4343}^2 v}{AR^2\overline{I}^2}\ \sigma^2(V)$$

$$v = f_o/v$$

Pour mesurer $\sigma(T)$ ou ϕ_T, il faut connaître la transmission moyenne $\overline{T}$ de l'échantillon dans les conditions d'ouverture numérique de l'appareil. Pour cela il suffit de mesurer des rapports d'intensité, en interposant au besoin, pour rester dans le domaine de linéarité du photomultiplicateur, des filtres gris neutres de transmission connue. Pour $\sigma(D)$ et ϕ_D il n'est pas nécessaire de connaître $\overline{T}$, et c'est $\sigma(D)$ ou ϕ_D que l'on mesure d'habitude.

D - Bruit de fond du photomultiplicateur ; étude photométrique de l'appareil.

1°) - Bruit de fond

Au signal se superpose le bruit de fond du photomultiplicateur, c'est-à-dire les fluctuations aléatoires de courant anodique dues à la structure granulaire de l'électricité (effet de grenaille ou effet Schottky). Après traversée du filtre, le bruit de fond est caractérisé par sa valeur quadratique moyenne que nous appellerons $\sigma_B(\overline{V})$ ou $\sigma_B(I)$.

Le bruit de fond et le signal étant deux processus aléatoires indépendants, il y a addition des variances ce qui donne :

$$\sigma^2_{\text{total}}(\overline{V}) = \sigma^2_{\text{signal}}(v) + \sigma_B{}^2(\overline{V})$$

Nous avons donc les formules suivantes tenant compte du bruit de fond :

$$\frac{\sigma(D)}{0,4343} = \frac{\sigma(T)}{\overline{T}} = \frac{\sigma^2(V) - \sigma_B{}^2(V)}{R\,\overline{I}}$$

$$\phi_T = \frac{\overline{T}^2 \nu}{A\,R^2\,\overline{I}^2}\left[\sigma^2(V) - \sigma_B{}^2(V)\right]$$

$$\phi_D = \frac{\overline{0,4343}^2\,\nu}{A\,R^2\,\overline{I}^2}\left[\sigma^2(V) - \sigma_B{}^2(V)\right]$$

L'expérience montre que si l'on fait varier la tension d'alimentation du photomultiplicateur dans un assez large domaine, toutes les autres conditions restant inchangées, $\overline{I}$ et $\sigma_B(I)$ varient tous deux, mais le rapport $\overline{I}/\sigma_B(\overline{I})$ reste pratiquement constant. Le rapport signal/bruit est donc indépendant de la tension d'alimentation ; par contre il dépend du flux lumineux reçu par le photomultiplicateur. La loi est la suivante :

$$\frac{\overline{I}}{\sigma_B(I)} = k\sqrt{\phi} \qquad (IV - 1)$$

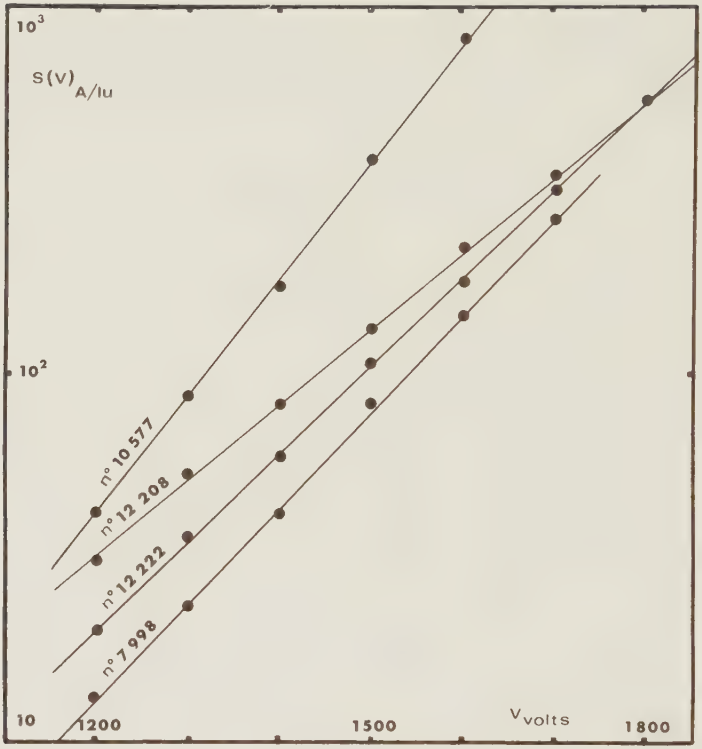


Fig. 17 - Sensibilité de différents photomultiplicateurs

Dans le cas où l'on travaille à bande large, le coefficient k se situe entre $0,8.10^5$ et $1,1.10^5$ pour les différents photomultiplicateurs Radiotechnique 51 AVP et 150 AVP qui ont été essayés.

$$\frac{\bar{I}}{\sigma_B(I)} \simeq 10^5 \sqrt{\phi} \quad \text{si} \quad \phi \text{ est en lumens}$$

Si l'on travaille à bande étroite dans les conditions courantes, le coefficient k est de l'ordre de 10^6.

2°) - Sensibilité des photomultiplicateurs

L'expérience montre que la sensibilité est une fonction exponentielle de la tension d'alimentation V_a :

$$\log S_{A/lu} = \log \frac{\bar{I}_A}{\phi_{lu}} = \frac{V_a - a}{b} \qquad (IV - 2)$$

où a et b sont deux constantes. La Figure 17 donne les courbes tracées pour quelques photomultiplicateurs.

3°) - Evaluation du flux lumineux ϕ

Nous emploierons une méthode de calcul indiquée par G. BRUHAT (180). Le flux lumineux ϕ reçu par le photomultiplicateur est donné par la formule :

$$\phi = L \, \mathcal{C} \, U \qquad (IV - 3)$$

où L est la luminance de la lampe
$\mathcal{C}$ est la transmission de l'ensemble du dispositif optique
U est une grandeur appelée "étendue du faisceau" qui se définit de la façon suivante :

Le faisceau lumineux traversant un appareil d'optique est limité par l'ouverture et le champ de cet appareil, que déterminent un certain nombre de diaphragmes. Ce faisceau lumineux peut être décomposé en faisceaux élémentaires limités chacun par un élément de surface dS d'un diaphragme et un élément de surface dS' d'un autre diaphragme (Fig. 18) l'étendue du faisceau élémentaire est :

$$dU = n^2 \frac{dS \, dS' \cos i \cos i'}{r^2} \qquad (IV - 4)$$

Fig.18

En intégrant on obtient l'étendue du faisceau total U :

$$U = \int_{\text{ouverture totale}} \int_{\text{champ total}} n^2 \frac{dS\, dS' \cos i \cos i'}{r^2}$$

Dans le cas où il y a plus de deux diaphragmes limitant le faisceau, on dit qu'il y a effet d"oeil de chat" ou de "vignetting". Dans le cas contraire, il n'y a qu'un seul diaphragme d'ouverture et qu'un seul diaphragme de champ et l'on peut écrire :

$$U = \int_{\text{diaphragme d'ouverture}} \int_{\text{diaphragme de champ}} n^2 \frac{dS\, dS' \cos i \cos i'}{r^2}$$

U est un invariant lorsqu'on passe d'un milieu à l'autre, c'est-à-dire lorsqu'on traverse une lentille. On peut donc le calculer dans n'importe quel milieu ; nous pouvons choisir ici le milieu où se trouve l'échantillon. L'ouverture est limitée par la monture des deux objectifs et le champ par le contour de la tache d'exploration (Fig.19), celle-ci étant petite, il n'y a pas d'effet d'oeil de chat et l'on a :

$$U = \int_{\substack{\text{monture de} \\ \text{l'objectif le} \\ \text{moins ouvert}}} \int_{\substack{\text{tache} \\ \text{d'exploration}}} \frac{n^2\, dS\, dS' \cos i \cos i'}{r^2}$$

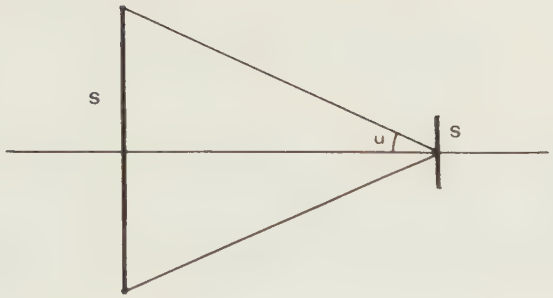


Fig. 19

L'intégration est facile et donne le résultat suivant :

$$U = \pi S' N^2$$

où S' est la surface de la tache d'exploration et N = n sin u la plus petite des ouvertures numériques des deux objectifs. En remplaçant nous avons :

$$\phi = \pi S' N^2 L \qquad (IV - 5)$$

4°) - Synthèse des résultats

Les formules (IV - 1) , (IV - 2) et (IV - 5) nous permettent de calculer le courant moyen et le bruit de fond du photomultiplicateur dans les conditions de travail données. Si nous prenons par exemple V = 1500 Volts, une tache d'exploration de 5 microns de diamètre, une optique de transmission 0,3 , un échantillon de densité 1,43 (mesurée dans l'appareil), un photomultiplicateur pour lequel

$$\log S_{A/lu} = \frac{Va_{volts} - 476}{486}$$

et L = 630 stilbs (tungstène à 2850°K), nous obtenons finalement dans le cas de la bande passante large :

$$I = 5.10^{-5} A = 50 \mu A$$

$$\frac{\bar{I}}{\sigma_B(I)} = 63$$

Si $\frac{\sigma(I)}{\bar{I}} = 0,3$, le rapport signal/bruit est

$$\frac{\sigma(I)}{B(I)} = 19$$

et la correction de bruit de fond est, en valeur relative :

$$(\frac{1}{19})^2 = 0,0028 = 0,28\%$$

Si l'on travaille en bande étroite, le signal et le bruit varient à peu près dans les mêmes proportions et le rapport signal/bruit reste du même ordre de grandeur. De même, si la loi de Selwyn est vérifiée, le rapport signal/bruit reste inchangé si l'on fait varier la dimension et la forme de la tache d'exploration. Pratiquement, on peut faire la mesure sans correction de bruit de fond si la densité diffuse de l'échantillon ne dépasse pas 2 à 2,5 , suivant que celui-ci est peu granuleux ou très granuleux ; au-dessus, en faisant la correction de bruit de fond, on peut faire des mesures jusqu'à la densité maximale des émulsions noir et blanc de type courant.

V - QUELQUES RESULTATS ET LEUR INTERPRETATION

Dans ce chapitre nous donnerons des exemples d'application de l'appareil à l'étude de problèmes variés, soit au moyen de la granularité quadratique moyenne, soit au moyen du spectre de Wiener. Nous verrons ensuite comment un certain nombre de résultats peuvent être interprétés en apportant un complément aux modèles statistiques classiques pour tenir compte de l'agglomération des grains.

A - Exemples de résultats expérimentaux

1°) - Vérification de la loi de Selwyn

La Fig. 20 montre la variation de σ_D en fonction du diamètre de la tache d'exploration pour deux émulsions différentes. Les courbes sont tracées en coordonnées bilogarithmiques ; au-dessus de 10 microns environ, on a sensiblement une droite de pente $-0,9$: la loi de Selwyn est donc assez bien vérifiée. Pour des diamètres inférieurs à 10 microns, des écarts plus importants apparaissent.

2°) - Influence de la densité sur la granularité.

La Fig. 21 représente l'étude de la granularité d'une émulsion radiographique pour trois traitements différents A, B et C. Des mesures ont été faites pour diverses valeurs de la densité ; on voit en particulier que la granularité est plus forte avec le traitement B qu'avec le traitement C aux faibles densités, et que c'est l'inverse aux densités élevées. La loi de Siedentopf n'est vérifiée que de façon assez approximative.

Les émulsions radiographiques courantes comportent deux couches, une de chaque côté du support. Pour ces mesures, ainsi que pour celles des paragraphes 5 et 6, l'une des couches d'émulsion a été enlevée avec de l'eau de Javel concentrée.

3°) - Influence de la densité sur la forme du spectre de Wiener.

Les courbes de la Fig.22 ont été obtenues avec une émulsion photographique de type courant. Tracées en coordonnées semi-logarithmiques, elles se déduisent sensiblement les unes des autres par une translation dans le sens vertical ; à ceci correspond, avec des échelles linéaires, une affinité dans le sens vertical, ce qui montre que la forme des spectres de Wiener dépend peu de la densité.

4°) - Effet d'un révélateur "grain fin"

Les Fig. 23 et 24 montrent deux expériences faites de la façon suivante : une émulsion photographique est développée dans un révélateur ordinaire, et dans un révélateur dit "grain fin" contenant un solvant du bromure d'argent. Dans le premier exemple, les spectres coïncident dans les hautes fréquences et diffèrent dans les basses fréquences. Ceci laisse supposer que la dimension des grains reste à peu près la même mais que le révélateur solvant diminue la tendance des grains à s'agglomérer ; cette hypothèse est vérifiée par les photos prises au microscope. Dans le second exemple (où l'émulsion et le révélateur ne sont pas les mêmes que pour le premier exemple), l'effet du révélateur solvant est plus marqué : il y a aussi diminution notable du diamètre des grains avec le révélateur solvant, ce que confirment encore les photos au microscope.

5°) - Emulsion radiographique : influence du kilovoltage.

Lorsqu'une émulsion est exposée aux rayons X, il se produit des phénomènes complexes, différentes de ceux qui ont lieu lors de l'exposition à la lumière visible : pour un photon X, plusieurs grains d'halogénure sont exposés par des électrons produits, soit par effet photoélectrique, ou par effet Compton. Les photons ont une grande énergie et sont relativement peu nombreux : des fluctuations quantiques apparaissent. Le résultat est une augmentation de la granularité, et ceci d'autant plus que les rayons X sont plus "durs".

La Fig. 25 montre une étude de ce phénomène au moyen du spectre de Wiener. Par rapport à l'exposition à la lumière visible, l'exposition aux rayons X à 100 KV donne un relèvement important du spectre. Avec 200 KV et en interposant une lame de cuivre pour filtrer les rayons X de faible longueur d'onde, le relèvement est encore plus marqué, surtout dans les basses fréquences spatiales.

6°) - Emulsion radiographique exposée avec écran renforçateur.

Si une émulsion radiographique est exposée avec un écran renforçateur, des fluctuations quantiques apparaissent dans l'image formée par l'écran. La granularité due à ces fluctuations quantiques, filtrée par la fonction de transfert de modulation de l'écran, est reportée sur le film. Seules les fréquences spatiales relativement basses sont transmises, de l'ordre de quelques mm^{-1}. Le résultat est un"mou - tonnement"caractéristique, qui a été étudié en particulier par K. ROSSMANN (182) (183) (184). La Fig. 26 montre l'étude du phénomène au moyen du spectre de Wiener ; l'échantillon avait été exposé avec un kilovoltage élevé (260 KV) pour que le phénomène soit bien net. On voit un relèvement important du spectre dans les basses fréquences spatiales.

B - Modèle statistique tenant compte des agglomérations de grains.

Des exemples que nous venons de voir se dégage la conclusion générale suivante : la granularité se décompose en deux phénomènes, d'une part la présence des grains eux-mêmes, c'est ce que nous appellerons la "granularité primaire", et d'autre part l'irrégularité de la répartition des grains, c'est ce que nous appellerons la "granularité secondaire". Ce dernier effet est dû à des causes diverses : agglomération des grains au cours du développement, structure granulaire du rayonnement reçu (cas de l'émulsion radiographique exposée sans écran), irrégularités de la lumière reçue (cas de l'émulsion radiographique exposée avec écran). Comme l'ont signalé qualitativement K.F. STULTZ et H.J. ZWEIG (185), ceci se traduit par un relèvement du spectre de Wiener vers les basses fréquences spatiales. Les modèles statistiques classiques ne tiennent compte que de la granularité primaire ; nous allons tenter de voir comment on peut y faire intervenir la granularité secondaire.

Supposons donc que les centres des grains ne sont plus répartis suivant la loi de Poisson telle que nous l'avons vue au chapitre II , mais que la probabilité d'apparition d'un point dans un élément de surface $dS = dxdy$ de coordonnées (x,y) est égale à :

$$P(1,dS) = p(x,y)\, dS = p(x,y)\, dxdy$$

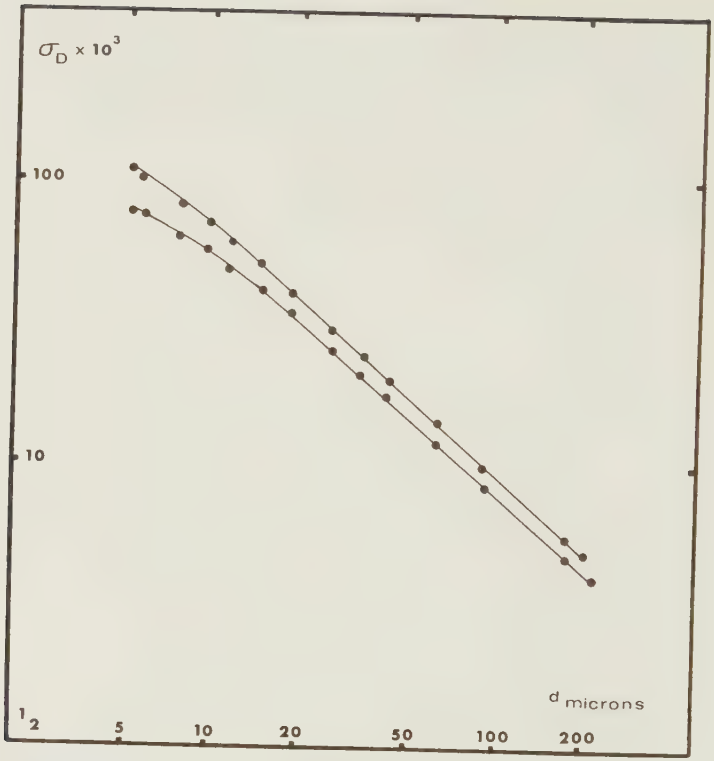


Fig. 20 - Vérification de la loi de Selwyn

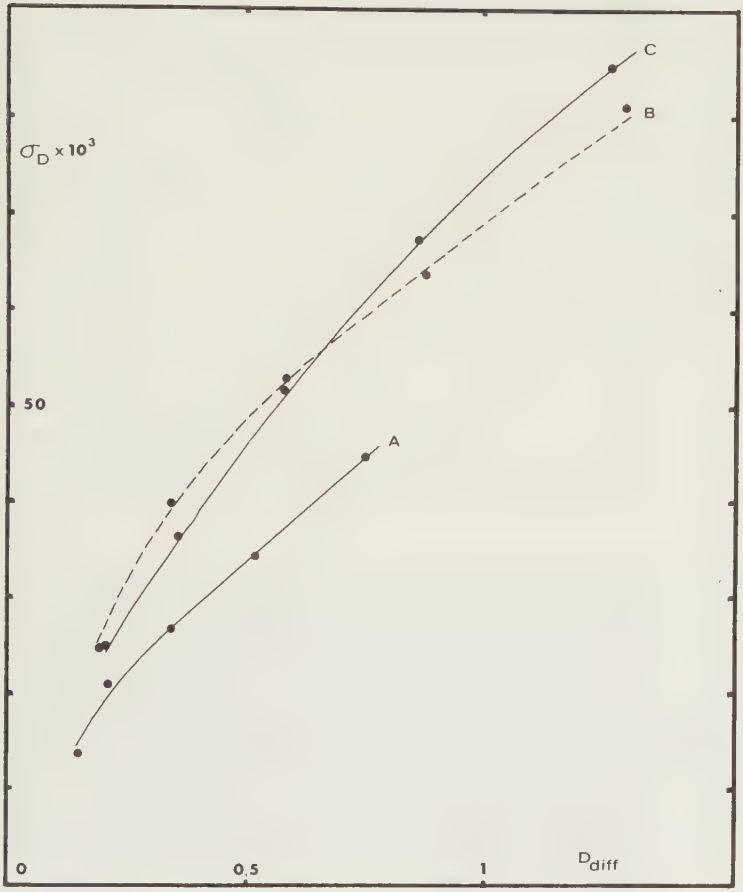


Fig. 21 - Influence de la densité pour différents traitements (tache circulaire ∅ 24 microns)

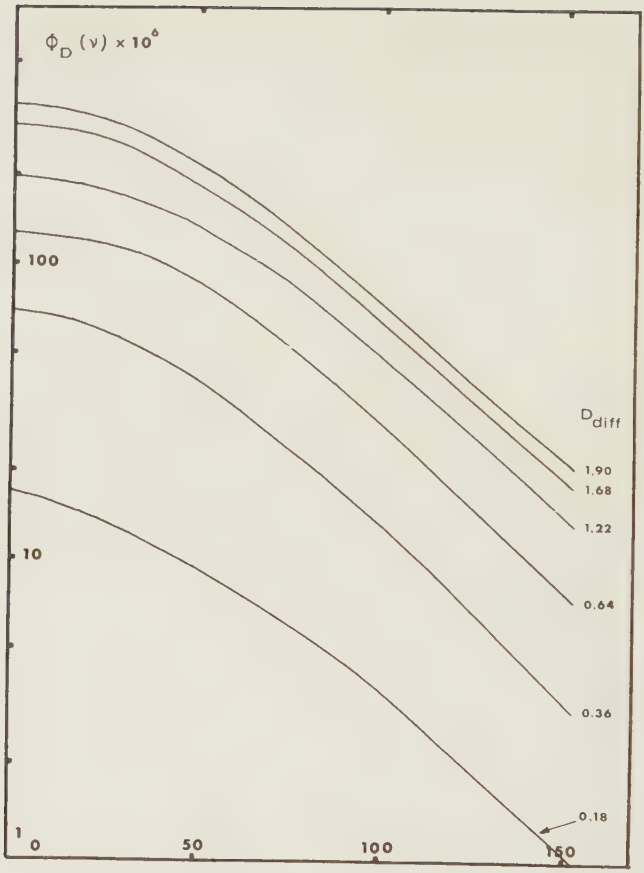
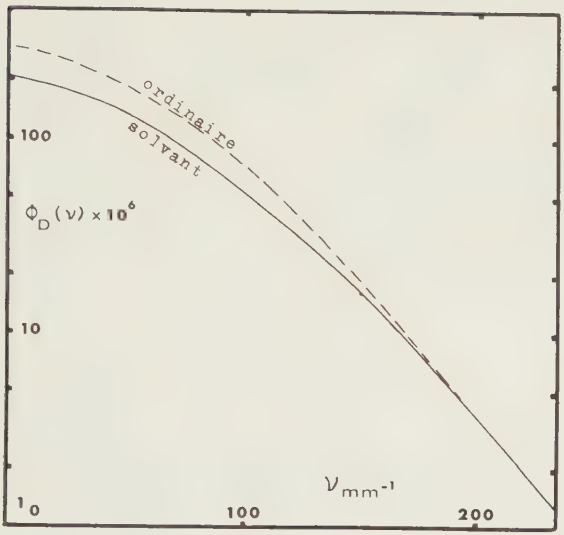
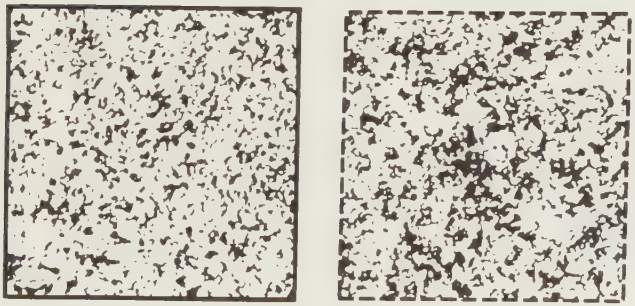


Fig. 22 - Influence de la densité sur la forme du spectre de Wiener (tache circulaire ∅ 5 microns)

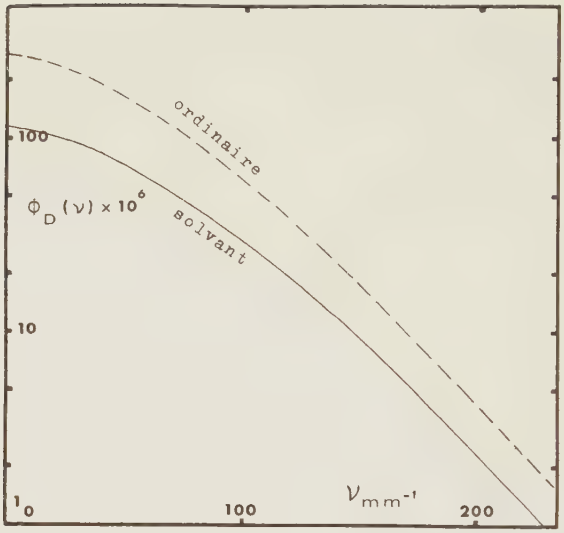


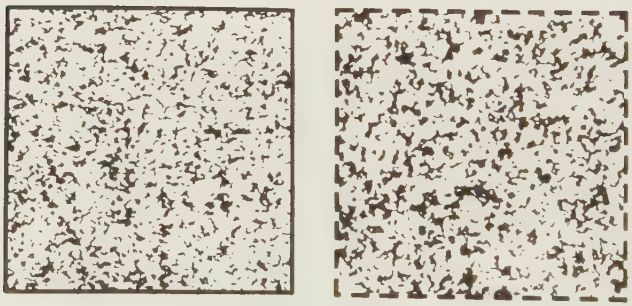


Révélateur solvant Révélateur ordinaire

(G = 300)

Fig. 23 - Effet d'un révélateur solvant (tache circulaire ∅ 5 microns)





Révélateur solvant Révélateur ordinaire

(G = 300)

Fig. 24 - Effet d'un révélateur solvant (tache circulaire Ø 5 microns)

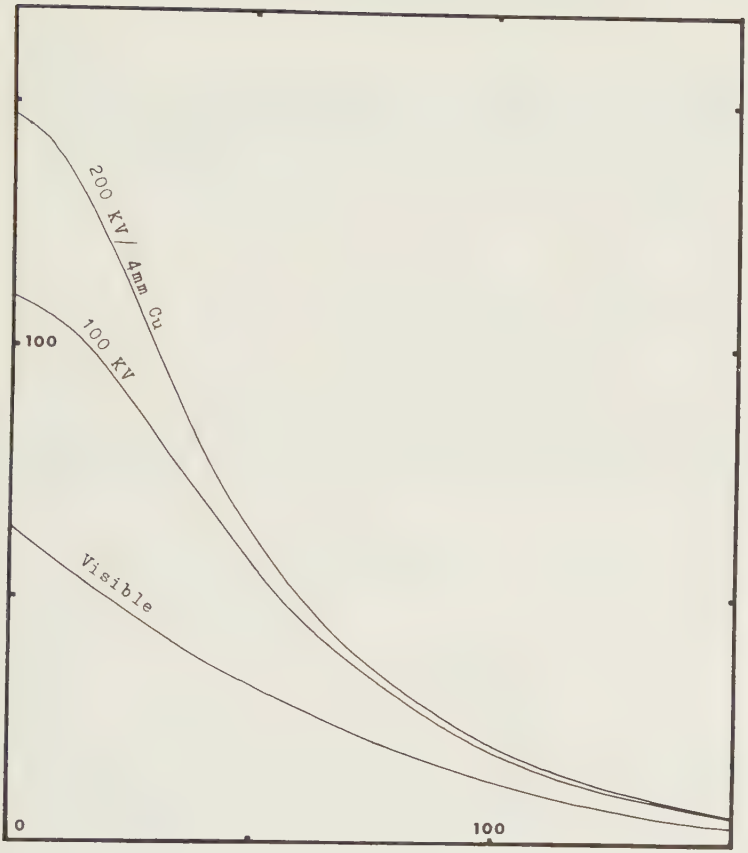


Fig. 25 - Emulsion radiographique exposée sans écran.
Influence du kilovoltage (tache circulaire ∅ 5 microns)

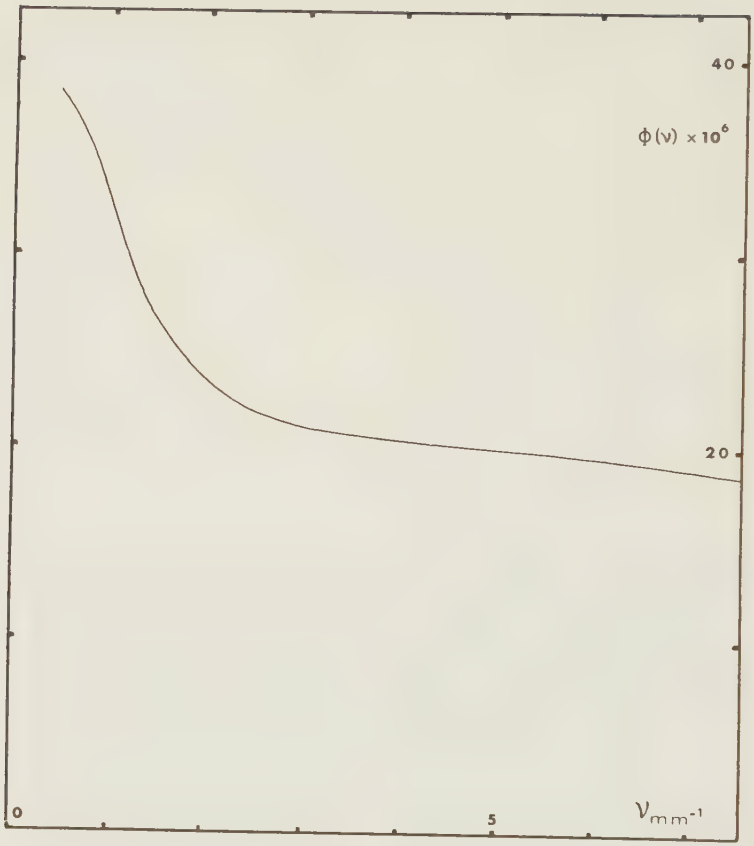


Fig. 26 - Emulsion radiographique exposée avec écran renforçateur (tache rectangulaire 30 x 500 microns)

au lieu de

$$P(1,dS) = \alpha dS = \alpha \, dx \, d\mu \quad (\alpha = cte)$$

Pour calculer le spectre de Wiener nous appliquerons une méthode de calcul qui a déjà été employée pour l'étude des fluctuations de courant dans les photomultiplicateurs. Dans le calcul nous supposerons d'abord que $p(x,y)$ est une fonction certaine, et nous traiterons ensuite $p(x,y)$ comme une fonction aléatoire.

1°) - Généralisation de la loi de Poisson.

La formule (II - 7) peut se généraliser au cas d'une probabilité $p(x,y)$ fonction du point, comme nous allons le voir en reprenant la démonstration classique de la loi de Poisson.

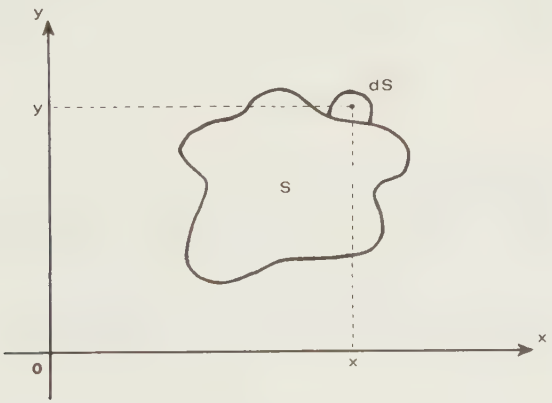


Fig. 27

Considérons donc dans le plan un domaine de surface S auquel on donne un petit accroissement dS de coordonnées (x,y). Nous avons la relation :

$$P(0,S+dS) = P(0,S)\ P(0,dS)$$

Pour un petit élément de surface dS la probabilité pour qu'il y ait plus de 1 point est un infiniment petit d'ordre supérieur et on peut la négliger :

$$P(0,dS) = 1 - P(1,dS) = 1 - p(x,y)\ dS$$

d'où $$P(0,S + dS) = P(0,S) \left[1 - p(x,y)\ dS \right]$$

et $$dP(0,S) = P(0,S + dS) - P(0,S) = P(0,S)\ p(x,y)\ dS$$

En résolvant cette équation différentielle on obtient :

$$P(0,S) = e^{-\varpi(S)}$$

où $$\varpi(S) = \int_S p(x,y)\ dS = \iint_S p(x,y)\ dxdy$$

On a d'autre part :

$$P(K,S + dS) = P(K-1,S)\ P(1,dS) + P(K,S)\ P(0,dS)$$

ce qui peut s'écrire :

$$P(K,S + dS) = P(K-1,S)\ p(x,y)\ dS + P(K,S) \left[1-p(x,y) \right] dS$$

ou encore :

$$dP(K,S) = P(K-1,S)\ p(x,y)\ dS - P(K,S)\ p(x,y)\ dS$$

En résolvant cette équation différentielle pour P(K-1,S) connue et P(K,S) inconnue on obtient la formule de récurrence :

$$P(K,S) = e^{-\varpi(S)} = \int_S e^{\varpi(S)}\ p(x,y)\ P(K-1,S)\ dS$$

dont l'application nous donne finalement :

$$P(K,S) = \frac{\left[\varpi(S)\right]^K e^{-\varpi(S)}}{K!}$$

$$\text{avec} \quad \varpi(S) = \iint_S p(x,y)\, dxdy$$

Nous obtenons une formule analogue à la formule classique de Poisson.

2°) - <u>Spectre de Wiener d'une somme d'impulsions dans le plan.</u>

Considérons la fonction aléatoire

$$f(x,y) = \sum_i g(x-x_i,\ y-y_i)$$

constituée d'une somme d'impulsions identiques de forme $g(x,y)$ dont les centres sont situés en des points de coordonnées (x_i,y_i) répartis suivant la loi que nous venons de voir (probabilité $p(x,y)$ fonction du point). L'autocorrélation est donnée par :

$$R(\tau,\tau') = E\left[f(x,y)\ f(x-\tau\ ,\ y-\tau')\right]$$

Comme nous l'avons vu au chapitre II, l'espérance mathématique est égale à la moyenne des valeurs possibles pondérées par leurs probabilités. Considérons dans le plan un domaine S, fini mais aussi grand que l'on veut, divisé complètement en cellules disjointes ΔS_1, ... ΔS_i, ... ΔS_n, que nous considérerons d'abord comme finies, puis comme infiniment petites. En un point (x,y) la fonction a la valeur :

$$f(x,y) = \sum_i \Delta N_i \quad g(x - \xi_i,\ y - \eta_i)$$

où ΔN_i est le nombre de points dans la cellule ΔS_i. De cette façon tout le caractère aléatoire est retiré de g et mis dans les ΔN_i, ce qui va faciliter le calcul. D'après la définition d'un processus de Poisson, nous avons la relation :

$$P(\Delta N_1,\ \ldots\ \Delta N_i,\ \ldots) = P(\Delta N_1)\ \ldots\ P(\Delta N_i)\ldots.$$

a) - Calcul de E(f)

$$E(f) = \sum_{\Delta N_1=0}^{+\infty} \cdots \sum_{\Delta N_i=0}^{+\infty} \cdots \left[\sum_i \Delta N_i \; g(x-\xi_i, y-\eta_i) \right] P(\Delta N_1) \cdots P(\Delta N_i) \cdots$$

L'expression entre crochets représente les différentes valeurs possibles de la fonction f(x,y) au point (x,y), et l'expression $P(\Delta N_1) \ldots P(\Delta N_i) \ldots$ leurs probabilités respectives.

Si les cellules ΔS_i sont petites, nous avons :

$$P(\Delta N_i = 0) \simeq 1$$

$$P(\Delta N_i = 1) \simeq p(\xi_i, \eta_i) \; \Delta S_i$$

$$P(\Delta N_i > 1) \simeq 0 \text{ (ordre supérieur à 1)}$$

L'expression $P(\Delta N_1) \ldots P(\Delta N_i)$ peut donc être une quantité finie, mais seulement dans le cas où tous les ΔN_i sont nuls : f(x,y) est alors rigoureusement nulle et il n'y a pas lieu d'en tenir compte. L'expression est un infiniment petit d'ordre supérieur à 1 s'il y a plus de 1 point dans S donc il suffit de considérer le cas où il y a un seul point, dans la cellule de rang K :

$$E(f) = \sum_K g(x - \xi_K, \; y - \eta_K) \; p(\xi_K, \eta_K) \; \Delta S_K$$

ou

$$E(f) = \iint_S g(x - \xi, \; y - \eta) \; p(\xi, \eta) \; d\xi \; d\eta$$

Considérons maintenant la fonction p comme aléatoire. La relation :

$$E(x_1 + x_2) = E(x_1) + E(x_2)$$

reste vraie pour une somme de n termes et même pour une intégrale, donc on peut écrire :

$$E(f) = \iint_S g(x - \xi, \; y - \eta) \; E(p) \; d\xi \; d\eta$$

Si la surface S tend vers l'ensemble du plan et si l'on pose $x - \xi = X$, $y - \eta = Y$, il vient :

$$E(f) = \overline{p} \iint_{-\infty}^{+\infty} g(X,Y)\, dX dY$$

b) - Calcul de l'autocorrélation

$$R_f(\tau, \tau') = E\left[f(x,y)\ f(x-\tau, y-\tau')\right]$$

$$= E\left[\sum_i \Delta N_i\ g(x-\xi_i, y-\eta_i)\ \sum_j \Delta N_j\ g(x-\tau-\xi_j, y-\tau'-\eta_j)\right]$$

$$= E\left[\sum_{ij} \Delta N_i\, \Delta N_j\ g(x-\xi_i, y-\eta_i)\ g(x-\tau-\xi_j, y-\tau'-\eta_j)\right]$$

Nous distinguerons les termes pour lesquels $i = j$ et ceux pour lesquels $i \neq j$.

a) - Termes $i = j$

$$R_1(\tau, \tau') = E\left[\sum_i \Delta N_i^{\,2}\ g(x-\xi_i, y-\eta_i)\ g(x-\tau-\xi_i, y-\tau'-\eta_i)\right]$$

$$R_1(\tau, \tau') = \sum_{\Delta N_1=0\ldots}^{+\infty} \sum_{\Delta N_i=0\ldots} \Big[\sum_i \Delta N_i^{\,2}\ g(x-\xi_i, y-\eta_i)$$

$$g(x-\tau-\xi_i, y-\tau'-\eta_i)\Big]\ P(\Delta N_1)\ldots\ P(\Delta N_i)\ldots$$

De même que dans le calcul de E(f), l'expression $P(\Delta N_1)\ldots\ P(\Delta N_i)\ldots$ peut être une quantité finie, mais alors l'expression entre crochets est nulle. Elle est du premier ordre s'il y a un seul point dans ΔS_K, sinon elle est d'ordre supérieur. Il suffit donc d'écrire :

$$R_1(\tau, \tau') = \sum_K g(x-\xi_K, y-\eta_K)\, g(x-\tau-\xi_K, y-\tau'-\eta_K)\, p(\xi_K, \eta_K)\, \Delta S_K$$

ou :

$$R_1(\tau, \tau') = \iint_S g(x-\xi, y-\eta)\, g(x-\tau-\xi, y-\tau'-\eta)\, p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

En considérant p comme aléatoire :

$$R_1(\tau, \tau') = \overline{p} \iint_S g(x-\xi, y-\eta)\, g(x-\tau-\xi, y-\tau'-\eta)\, d\xi\, d\eta$$

Si S tend vers l'ensemble du plan et si $X = x-\xi$, $Y = y-\eta$:

$$R_1(\tau, \tau') = \overline{p} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(X,Y)\, g(X-\tau, Y-\tau')\, dX\, dY$$

$$R_1(\tau, \tau') = \overline{p}\, (g * \check{g})\, (\tau, \tau') \qquad (V-1)$$

β) Termes $i \neq j$

$$R_2(\tau, \tau') = E\left[\sum_i \sum_{j\neq i} \Delta N_i\, g(x-\xi_i, y-\eta_i)\, \Delta N_j\, g(x-\tau-\xi_j, y-\tau'-\eta_j)\right]$$

$$P(\Delta N_1) \ldots P(\Delta N_i) \ldots P(\Delta N_j) \ldots$$

$$R_2(\tau, \tau') = \sum_{\Delta N_1=0\ldots\, \Delta N_i=0\ldots\, \Delta N_j=0\ldots}^{+\infty} \left[\sum_i \sum_{j\neq i}\right] P(\Delta N_1)\ldots$$

Si l'expression $P(\Delta N_1) \ldots P(\Delta N_i) \ldots P(\Delta N_j)\ldots$ est finie, la quantité entre crochets est nulle ; si elle est du premier ordre, cette quantité est encore nulle. Elle est du second ordre s'il y a un seul ΔN_i égal à 1, soit ΔN_K, et un seul ΔN_j égal à 1, soit ΔN_l. Sinon elle est d'ordre supérieur à 2. Ceci nous donne :

$$R_2(\tau, \tau') = \sum_K \sum_{l\neq K} g(x-\xi_K, y-\eta_K)\, g(x-\tau-\xi_l, y-\tau'-\eta_l)$$

$$p(\xi_K, \eta_K)\, p(\xi_l, \eta_l)\, \Delta s_K\, \Delta s_l$$

$$R_2(\tau, \tau') = \iint_S \iint_S g(x-\xi, y-\eta)\, g(x-\tau-\xi', y-\tau'-\eta')\, p(\xi, \eta)$$

$$p(\xi', \eta')\, d\xi\, d\eta\, d\xi'\, d\eta'$$

Faisons tendre S vers la totalité du plan.
$R_2(\tau,\tau')$ est le produit de deux intégrales doubles puisque les variables ξ, η, ξ', η' sont indépendantes :

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} g(x-\xi, y-\eta)\ p(\xi,\eta)\ d\xi\ d\eta = (g * p)(x,y)$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} g(x-\tau-\xi', y-\tau'-\eta')\ p(\xi',\eta')\ d\xi'\ d\eta' = (g * p)(x-\tau, y-\tau')$$

Si maintenant nous considérons p comme aléatoire, $(g * p)$ l'est aussi :

$$R_1(\tau,\tau') = E\left[(g * p)(x,y) \cdot (g * p)(x-\tau, y-\tau')\right]$$

$$= R_{g*p}(\tau,\tau') = R_p(\tau,\tau') * (g * \check{g}).$$

γ) - Combinaison des résultats. Spectre de Wiener.

En tout nous avons :

$$R(\tau,\tau') = R_1(\tau,\tau') + R_2(\tau,\tau')$$

$$R(\tau,\tau') = \bar{n}\ (g * \check{g})\ (\tau,\tau') + R_p(\tau,\tau') * (g * \check{g})$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$R(\tau,\tau') = \bar{n}\ \delta(\tau,\tau') + R_p(\tau,\tau') * (g * \check{g})$$

Pour le spectre de Wiener nous avons :

$$S(\nu,\mu) = \bar{n} + S_p(\nu,\mu) \cdot \left[G(\nu,\mu)\right]^2$$

Si nous considérons les fluctuations

$\Delta f(x,y) = f(x,y) - \bar{f}$, les formules deviennent :

$$r(\tau,\tau') = \bar{n}\ \delta(\tau,\tau') + r_p\ (\tau,\tau') * (g * \check{g})$$

$$s(\nu,\mu) = \bar{n} + s_p(\nu,\mu)\ .\ \left[G(\nu,\mu)\right]^2$$

Dans le cas particulier où $g(x,y) = \delta(x,y)$ et où $p(x,y) = cte$, il reste :

$$s(\nu,\mu) = \bar{n}$$

Le spectre de Wiener d'une somme d'impulsions de Dirac en répartition de Poisson est un "spectre blanc" où toutes les fréquences spatiales sont également représentées. Dans le cas général, le spectre de Wiener de la fonction $f(x,y)$ est égal à ce spectre blanc augmenté du spectre de $p(x,y)$, le tout filtré par $\left[G(\nu,\mu)\right]^2$.

3°) - <u>Application à un modèle statistique du type de celui de Clark-Jones</u>.

On suppose les grains circulaires, tous de même rayon a, et l'on néglige les recouvrements de grains. On a donc :

$$g(x,y) \begin{cases} = 1 & \text{si} \quad x^2 + y^2 < a \\ = 0 & \text{si} \quad x^2 + y^2 > a \end{cases}$$

et d'après (II - 3) :

$$G(\nu,\mu) = G(\rho) = \frac{a}{\rho}\ J_1(2\pi a\rho)$$

La transmission $T(x,y)$ est donnée par :

$$T(x,y) = 1 - f(x,y)$$

ce qui nous donne pour la transmission moyenne :

$$\bar{T} = 1 - \bar{f}$$

$$\bar{T} = 1 - \bar{n}\ \pi a^2$$

et pour le spectre de Wiener :

$$s_T(\nu,\mu) = s_T(\rho) = s_f(\rho) = \left[\bar{n} + s_p(\rho)\right]\left[\frac{a}{\rho}\ J_1(2\pi a\rho)\right]^2$$

Le premier terme :

$$\bar{n}\left[\frac{a}{\rho}\,J_1(2\pi a\rho)\right]^2$$

représente la granularité primaire. Il correspond à l'"effet de grenaille pur" obtenu par la même méthode à propos des photomultiplicateurs. Il est égal au spectre de la formule (III-2). Si l'on suppose que les grains ont un diamètre de 0,4 micron, $a = 0{,}2 \times 10^{-3}$ mm et le premier zéro de la fonction $J_1(2\pi a\rho)$ a lieu pour $\rho = 3000$ mm^{-1} environ ; le spectre primaire s'étend dans un très large domaine de fréquences spatiales.

Le deuxième terme :

$$s_p(\rho)\left[\frac{a}{\rho}\;J_1(2\pi a\rho)\right]^2$$

représente la granularité secondaire. Si le diamètre des agglomérations de grains est de l'odre de 10 microns, le spectre secondaire s'étend jusqu'à 100 mm^{-1} environ ; s'il est de l'ordre de 100 microns, le spectre secondaire s'étend jusqu'à 10 mm^{-1} environ.

Dans le cas du moutonnement dû à un écran renforçateur en radiographie (Fig. 26), il se manifeste seulement dans les très basses fréquences spatiales, de l'ordre de quelques mm^{-1}. Dans le cas des émulsions radiographiques exposées sans écran (Fig. 25) ou des agglomérations de grains produites au cours du développement (Fig. 23-24), le spectre de granularité secondaire est plus étendu, tout en l'étant moins que le spectre primaire.

Dans l'interprétation du spectre expérimental, il y a lieu de considérer le filtrage de l'ensemble par la tache d'exploration, comme nous le verrons en détail au chapitre VIII. Le phénomène a généralement l'allure que schématise la Fig.28 .

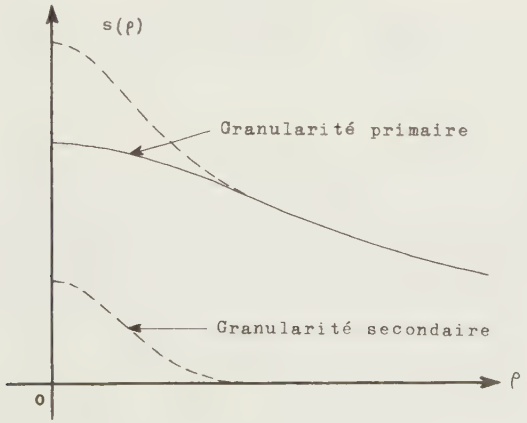


Fig. 28

VI - EFFET CALLIER

A - Généralités sur l'effet Callier

L'effet Callier est la variation de la densité mesurée avec les conditions dans lesquelles on éclaire l'échantillon et dans lesquelles on recueille la lumière, variation due aux propriétés diffusantes de l'émulsion photographique développée (186) (187). Ce phénomène a été étudié d'abord par A. CALLIER (188) puis, comme nous l'avons vu au chapitre I , par S.D. THREADGOLD (18) et par J. EGGERT et A. KÜSTER (20) à (23), puis par divers auteurs tels que R. GÖRISCH(189), R.G. POWELL (190), H. FRIESER (191) , K. SAYANAGI (192). Des études théoriques ont été faites par P. VERNIER (193) (194) (195) (196) .

A propos de la granularité, deux problèmes se posent : d'une part les relations existant éventuellement entre la granularité et l'effet Callier, et d'autre part l'influence des caractéristiques optiques des instruments utilisés dans la mesure de la granularité.

1°) - Définitions

On appelle densité "dirigée" ou "spéculaire" $D_{//}$ la densité mesurée en éclairant l'échantillon en lumière dirigée et en ne recueillant que la lumière non déviée. On appelle "densité diffuse" $D_{\not/}$ (ces deux notations sont dues à A. CALLIER) la densité mesurée en éclairant en lumière dirigée et en recueillant toute la lumière sortant de l'échantillon dans un angle solide 2π. On définit également la densité "doublement diffuse" $D_{\not/\not/}$: c'est la densité mesurée en éclairant en lumière diffuse et en recueillant la lumière dans un angle solide 2π (Fig. 29) (199).

On appelle "coefficient de Callier" Q le rapport entre la densité dirigée et la densité diffuse :

$$Q = \frac{D_{//}}{D_{\not/}}$$

Pour la même émulsion traitée dans les mêmes conditions, mais exposée avec des temps de pose différents, l'expérience montre que le rapport $D_{//} / D_{\not/}$ varie assez peu avec la densité : c'est pourquoi, pour caractériser les propriétés diffusantes d'un film donné, on a choisi le rapport des densités, plutôt qu'une autre grandeur telle que la différence des densités $D_{//} - D_{\not/}$ ou la différence des transmissions $T_{\not/} - T_{//}$.

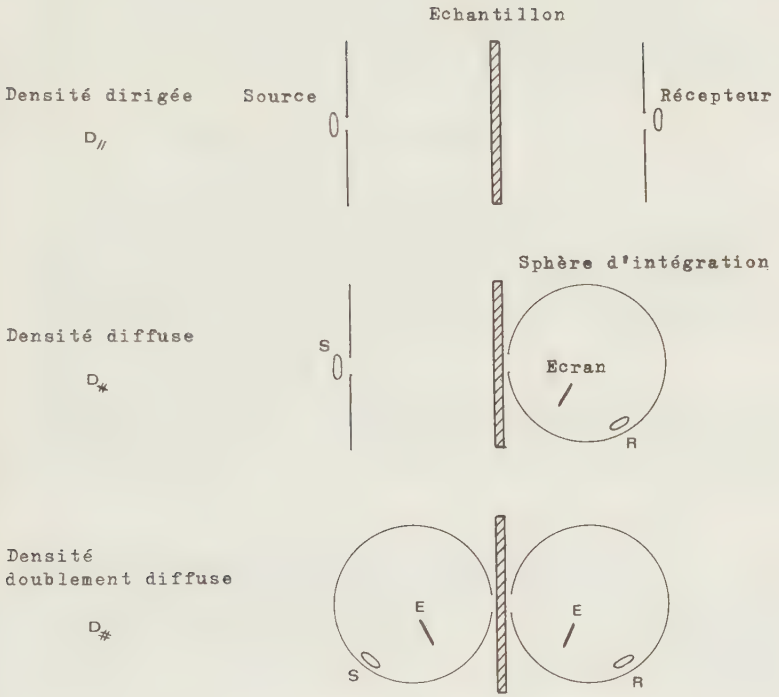


Fig. 29 - Différentes définitions de la densité

La diffusion de la lumière par les émulsions développées est due à deux causes : diffusion par les grains d'argent et diffusion par la surface de l'émulsion : celle-ci se gonfle localement lorsque les grains d'argent sont formés et prend un aspect mat. Comme l'avait déjà remarqué A. CALLIER qui avait fait des expériences en recouvrant d'un vernis la surface de l'émulsion, la surface n'absorbe pratiquement pas de lumière : si l'on supprime les irrégularités de surface par vernissage ou immersion, on modifie la densité dirigée et non la densité diffuse. La surface de l'émulsion étant assez sensible au mode de traitement et de séchage et aux manipulations éventuelles du film, on conçoit que pour les normes concernant la sensitométrie on ait choisi la densité diffuse plutôt que la densité dirigée.

2°) - Principe de réciprocité

L'optique géométrique classique obéit à un principe énoncé par HELMHOLTZ (200) et que l'on appelle "principe du retour inverse de la lumière" : si deux rayons lumineux traversent un système de milieux isotropes en sens inverse et si dans l'un quelconque de ces milieux leur trajet coïncide, ils coïncident dans l'ensemble du système.

Ce principe est vérifié quand on ne considère que des phénomènes de réflexion et de réfraction. Lorsqu'on tient compte de la diffraction et de la diffusion la notion de "rayon lumineux" n'a plus le même sens précis, mais il subsiste encore un principe de réciprocité que nous allons voir.

Soit un objet diffusant (Fig. 30) éclairé par un système optique d'éclairage. Une direction peut être définie par deux de ses cosinus directeurs, soient β et γ ; à l'élément différentiel $d\beta d\gamma$ correspond un élément d'angle solide dont nous verrons plus loin l'expression, et dans $d\beta d\gamma$ le flux lumineux reçu par l'échantillon est de la forme :

$$d\Phi = \mathcal{E}(\beta,\gamma)\, d\beta d\gamma$$

où $\mathcal{E}(\beta,\gamma)$ représente la répartition angulaire des énergies.

Après traversée de l'objet, la lumière a une nouvelle répartition angulaire $\mathcal{E}'(\beta',\gamma')$ et le flux émis dans $d\beta'\, d\gamma'$ est :

$$d\Phi' = \mathcal{E}'(\beta',\gamma')\, d\beta' d\gamma'$$

Si l'objet diffusant reçoit seulement un flux $d\Phi$ localisé dans $d\beta d\gamma$, il émet une lumière caractérisée par :

$$\mathcal{E}'(\beta',\gamma') = d\Phi \cdot D(\beta,\gamma,\beta',\gamma')$$

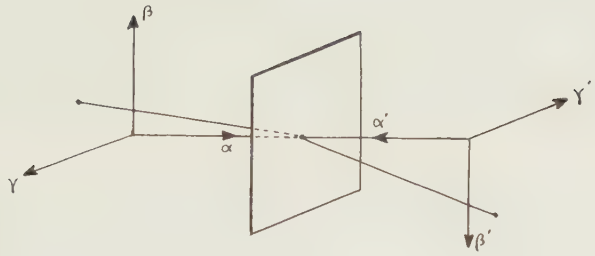


Fig. 30

La fonction de 4 variables $D(\beta,\gamma,\beta',\gamma')$ définit de façon complète la diffusion de la lumière par l'échantillon. Elle nous permet de savoir comment sera répartie la lumière diffuse pour une répartition quelconque $\mathcal{E}(\beta,\gamma)$ de l'éclairage :

$$\mathcal{E}'(\beta',\gamma') = \iint_{\beta^2+\gamma^2 \leq 1} \mathcal{E}(\beta,\gamma)\, D(\beta,\gamma,\beta',\gamma')\, d\beta d\gamma$$

La façon dont on recueille la lumière est caractérisée par une fonction de pondération $P(\beta',\gamma')$; le flux arrivant sur le récepteur a pour expression :

$$\Phi' = \iint_{\beta'^2+\gamma'^2 \leq 1} \mathcal{E}'(\beta',\gamma')\, P(\beta',\gamma')\, d\beta' d\gamma' = \langle \mathcal{E}', P \rangle$$

on a donc :

$$\Phi = \iint_{\beta^2+\gamma^2 \leq 1} \iint_{\beta'^2+\gamma'^2 \leq 1} \mathcal{E}(\beta,\gamma) D(\beta,\gamma,\beta',\gamma') P(\beta',\gamma') d\beta d\gamma d\beta' d\gamma'$$

Les fonctions $\mathcal{E}(\beta,\gamma)$ et $P(\beta',\gamma')$ caractérisent la géométrie des systèmes optiques d'éclairage et de mesure. Pour leur donner les mêmes dimensions nous écrirons :

$$\mathcal{E}(\beta,\gamma) = K\, F(\beta,\gamma)$$

où K est une constante qui caractérise la source lumineuse ; $F(\beta,\gamma)$ est analogue à $P(\beta',\gamma')$. L'équation devient :

$$\phi' = K \iint_{\beta^2+\gamma^2 \leq 1} \iint_{\beta'^2+\gamma'^2 \leq 1} F(\beta,\gamma) D(\beta,\gamma,\beta',\gamma') P(\beta',\gamma') d\beta d\gamma d\beta' d\gamma'$$

S'il n'y a pas d'échantillon :

$$D(\beta,\gamma,\beta',\gamma') = \delta(\beta' - \beta \ , \ \gamma' - \gamma)$$

et le flux qui atteint le récepteur devient :

$$\phi'_0 = K \iint_{\beta^2+\gamma^2 \leq 1} F(\beta,\gamma) \ P(\beta,\gamma) \ d\beta d\gamma$$

La transmission de l'échantillon est le rapport des flux reçus avec et sans échantillon :

$$T = \frac{K \iint_{\beta^2+\gamma^2 \leq 1} \iint_{\beta'^2+\gamma'^2 \leq 1} F(\beta,\gamma) D(\beta,\gamma,\beta',\gamma') P(\beta',\gamma') d\beta d\gamma d\beta' d\gamma'}{K \iint_{\beta^2+\gamma^2 \leq 1} F(\beta,\gamma) \ P(\beta,\gamma) \ d\beta d\gamma} \qquad (VI - 1)$$

Si on échange les deux systèmes optiques, on a maintenant :

$$T = \frac{K \iint_{\beta^2+\gamma^2 \leq 1} \iint_{\beta'^2+\gamma'^2 \leq 1} P(\beta,\gamma) D(\beta,\gamma,\beta',\gamma') F(\beta,\gamma) d\beta d\gamma d\beta' d\gamma'}{K \iint_{\beta^2+\gamma^2 \leq 1} P(\beta,\gamma) \ F(\beta,\gamma) \ d\beta d\gamma}$$

ce qui donne le même résultat si :

$$D(\beta,\gamma,\beta'\gamma') = D(\beta'\gamma',\beta,\gamma')$$

Cette dernière équation traduit le principe de réciprocité. P. VERNIER (196) en a donné une expression pour la diffraction de la lumière par un échantillon très mince ; il semble que ce principe soit encore vérifié pour un objet diffusant assez épais, un verre opale par exemple. Les formules démontrées dans la suite de ce chapitre vérifient ce principe, et les mesures que nous avons faites le vérifient aussi aux erreurs d'expérience près.

On peut par exemple mesurer la densité diffuse de deux façons : éclairer en lumière parallèle et recueillir toute la lumière diffusée, ou éclairer en lumière diffuse et ne recueillir que dans un très petit angle solide. La densité mesurée est la même : ceci peut paraître surprenant mais on doit se rappeler que la transmission n'est pas le rapport des flux lumineux reçus par l'échantillon et par le récepteur photoélectrique, mais le rapport des flux reçus par le récepteur en présence et en l'absence de l'échantillon.

3°) - Etude expérimentale : indicatrices de diffusion.

Une indicatrice d'émission ou de diffusion est une surface qui représente la quantité $L = d\phi/d\Omega$ en fonction de la direction. Si l'éclairage a une symétrie de révolution et si l'objet diffusant est isotrope, la lumière sortante a aussi une symétrie de révolution et cette surface peut être représentée par sa méridienne.

Considérons un petit élément de surface dS dans un plan à la distance 1 de l'échantillon (Fig. 31) :

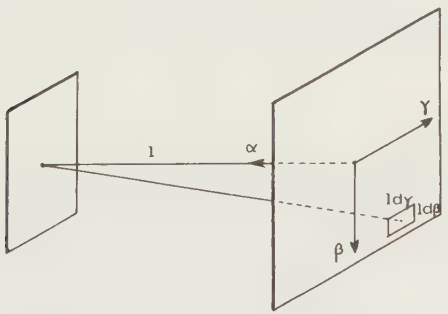


Fig. 31

$$dS = ld\beta \cdot ld\gamma$$

$$d\Omega = \frac{ds \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{\cos\theta}\,\frac{dS}{l^2} = \frac{1}{\cos\theta}\,d\beta d\gamma = \frac{d\beta\, d\gamma}{\sqrt{1-\beta^2-\gamma^2}}$$

donc :

$$L = \frac{\varepsilon' d\beta d\gamma}{d} = \sqrt{1-\beta^2-\gamma^2}\;\varepsilon' = \varepsilon' \cos\theta$$

Lorsqu'on trace une indicatrice de diffusion, la quantité étudiée en fonction de θ est donc égale à $\varepsilon' \cos\theta$. Pour tracer ces courbes nous avons utilisé un goniophotomètre dont la Fig. 32 représente un schéma. Cet appareil mesure le flux lumineux $d\phi$ reçu dans un petit angle solide $d\Omega$ constant : le résultat est proportionnel à L. Pour ces mesures ainsi que pour celles qui seront exposées dans les paragraphes suivants, les échantillons sont choisis parmi 4 émulsions :

A - grain très fin
B - grain fin
C - rapide
D - très rapide

La Fig. 33 montre la courbe obtenue sans échantillon et un exemple de courbe obtenue avec échantillon. Pour les deux courbes les valeurs de flux lumineux reçus par le photomultiplicateur sont exprimés par rapport à la valeur maximale de ce flux. S'il y a un échantillon, la courbe représente la lumière diffusée plus un pic central correspondant à la lumière non diffusée ; s'il n'y a pas d'échantillon, la courbe est constituée du pic central seulement. En principe ce pic central est une impulsion de Dirac, mais la résolution de l'appareil n'est que de quelques degrés, d'où un élargissement que l'on voit sur la figure.

Les indicatrices de diffusion sont obtenues en retranchant de la fonction obtenue avec l'échantillon celle obtenue sans échantillon multipliée par un coefficient convenable, de telle façon que les ordonnées maximales des deux fonctions soient rendues égales. La précision est faible si l'angle θ est très petit ; à partir de 3° le résultat est valable, en-dessous de 3° il n'a plus de sens. C'est pourquoi les indicatrices de diffusion ne sont tracées que pour des angles compris entre - 3° et - 90°, + 3° et + 90°. Les résultats sont exprimés en unités arbitraires et non en unités absolues de luminance ; en effet, seule la forme des indicatrices de diffusion nous intéresse et de cette façon un étalonnage n'est pas nécessaire. D'autre part, pour chaque courbe il a été fait une mesure du flux reçu

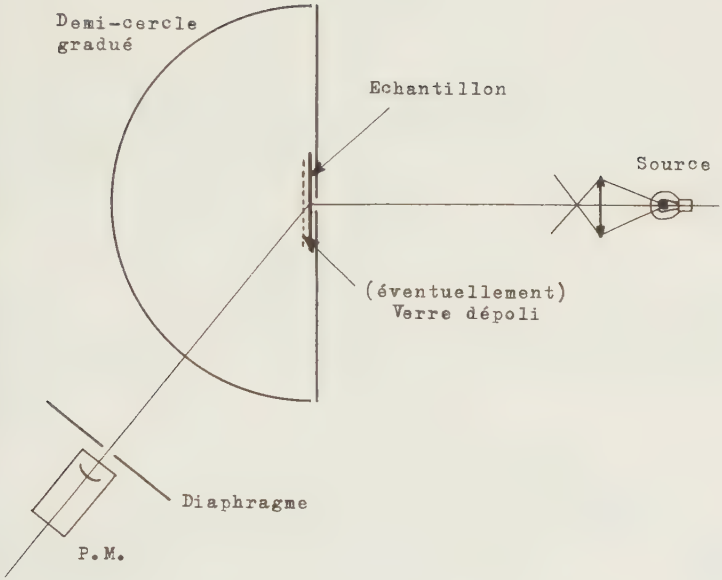


Fig. 32 - Schéma du goniophotomètre

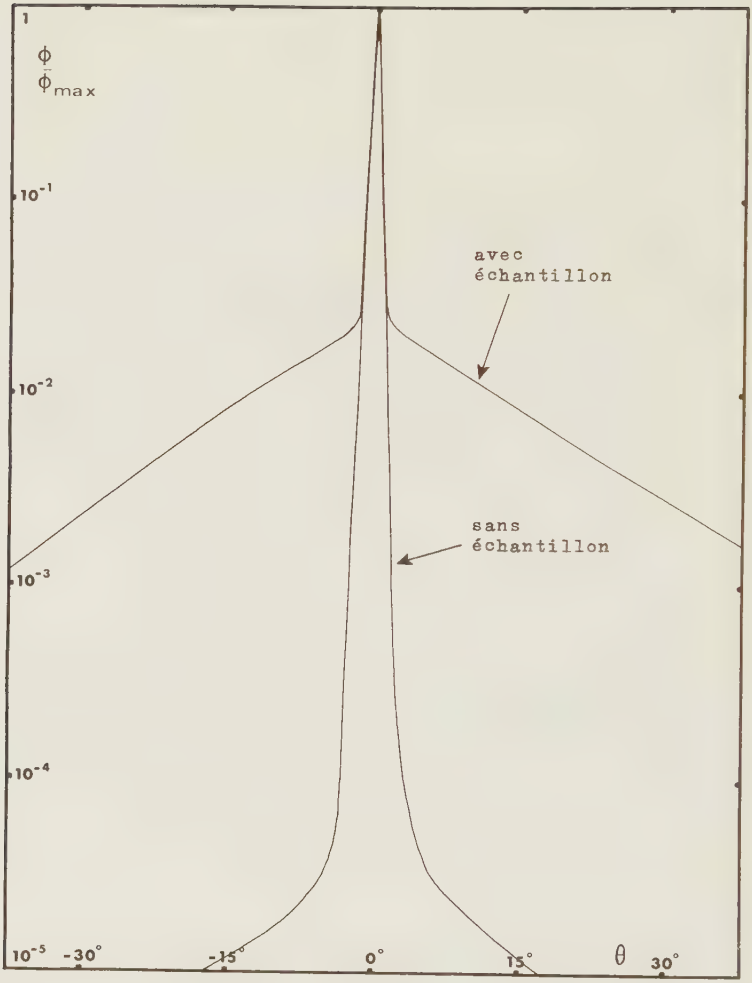

1
$\frac{\phi}{\bar{\phi}_{max}}$
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
avec
échantillon
sans
échantillon
-30°
-15°
0°
15°
θ
30°

Fig. 33

en plaçant un verre opale devant l'échantillon ; les résultats ont été multipliés par un coefficient de façon à ramener ce flux à une valeur constante. Ceci permet de tracer sur un même graphique les indicatrices de diffusion obtenues avec des échantillons de densités très différentes.

L'influence de divers facteurs sur la forme de l'indicatrice de diffusion a été ainsi étudiée :

a) - Influence de la surface

Les courbes de la Fig. 34 nous montrent le résultat obtenu avec immersion (courbes en trait plein) et sans immersion (courbes en pointillé) pour une densité de l'ordre de 0,9 avec les émulsions B et C. Les courbes sont confondues pour des angles supérieurs à 7° ; la surface ne diffuse donc de façon appréciable que dans un cône de demi-angle au sommet 7°. Nous en verrons plus loin une explication.

b) - Influence de la densité

Les Fig. 35 -36 montrent des indicatices de diffusion tracées à différentes densités pour les émulsions B et D. On voit que la diffusion est plus étalée si la densité augmente ; nous verrons également une explication de ce phénomène.

c) - Influence du type d'émulsion

La Fig. 37 montre des courbes tracées avec plusieurs émulsions pour des densités voisines de 0,9. Le coefficient de Callier est différent, mais la forme de l'indicatrice de diffusion reste à peu près la même.

d) - Variation du coefficient de Callier avec la densité.

L'appareil décrit au paragraphe précédent nous a servi également à mesurer des densités dirigées en le réglant sur l'angle zéro, et des densités diffuses en plaçant un verre opale devant l'échantillon.

La Fig. 38 montre la variation de la densité dirigée en fonction de la densité diffuse pour l'émulsion C. Les courbes en pointillé sont une anticipation sur des paragraphes qui vont suivre : elles représentent les densités mesurées avec différentes valeurs des ouvertures numériques. La Fig. 39 montre la variation du coefficient de Callier, déduite des résultats précédents : on voit que le coefficient de Callier varie peu avec la densité.

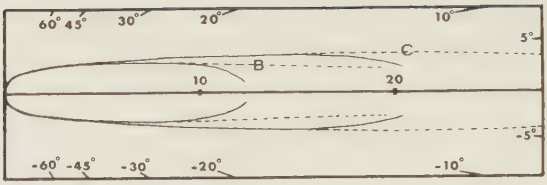


Fig. 34 - Influence de la surface

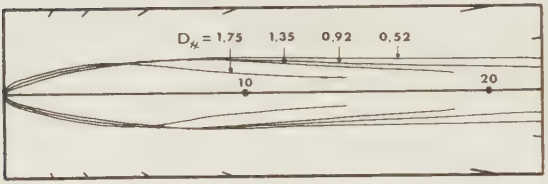


Fig. 35 - Influence de la densité
(Emulsion B)

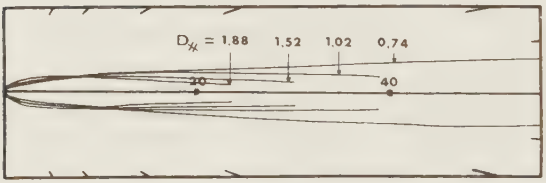


Fig. 36 - Influence de la densité
(Emulsion D)

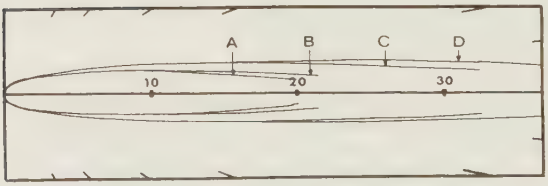


Fig. 37 - Influence du type d'émulsion
($D \simeq 0,9$)

Fig. 38

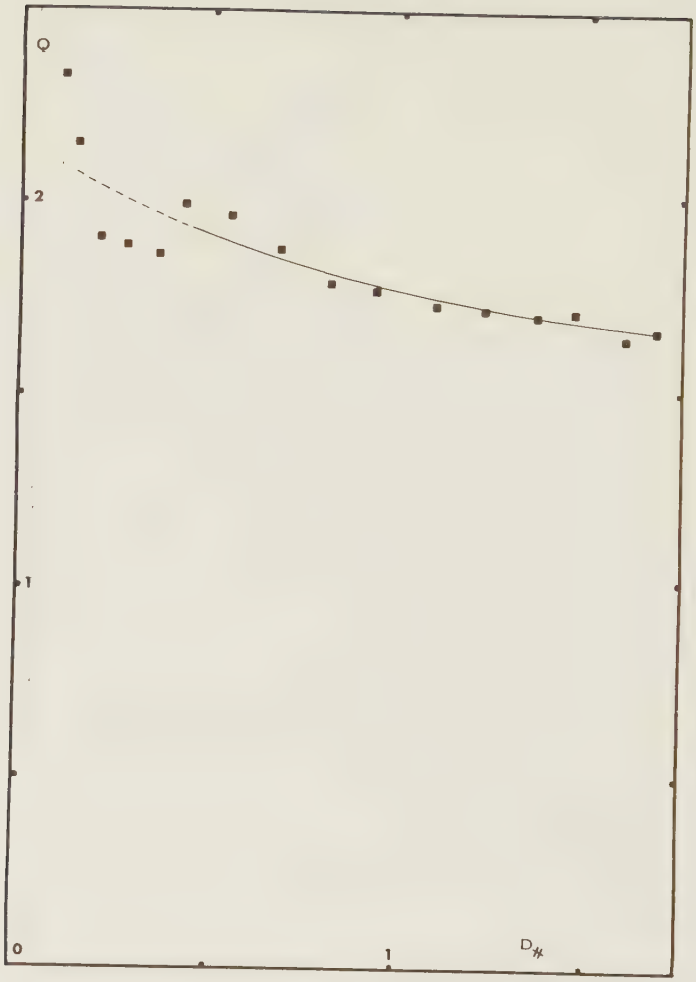


Fig. 39

Considérons l'émulsion comme constituée de couches minces superposées, comme dans la théorie de Nutting. Nous allons voir que ce modèle permet d'expliquer la constance du coefficient de Callier, à condition que la diffusion soit peu étalée.

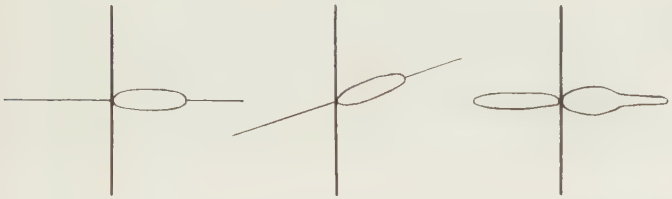


Fig. 40

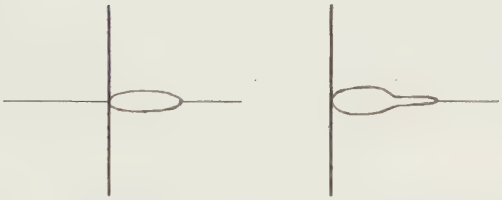


Fig. 41

La Fig. 40 représente la diffusion par un échantillon. Si la lumière incidente n'est pas tout à fait normale au plan de l'échantillon, la forme de l'indicatrice est peu modifiée et les densités spéculaire et diffuse sont pratiquement inchangées. Si par conséquent la lumière incidente est légèrement diffuse, la densité diffuse est peu modifiée. Plaçons maintenant deux échantillons de ce genre l'un à la suite de l'autre (Fig. 41). Il est clair que la transmission dirigée est le produit des deux transmissions dirigées, et en vertu de ce que nous venons de voir, la transmission diffuse est sensiblement le produit des deux transmissions diffuses. Les densités diffuses et dirigées s'ajoutent :

$$D_{//} = D_{1//} + D_{2//}$$

$$D_{\#} = D_{1\#} + D_{2\#}$$

On peut admettre que le fait d'augmenter la densité équivaut à empiler ces couches élémentaires en nombre de plus en plus grand. Si ces couches sont indépendantes, ce qu'on peut admettre en première approximation, et si la diffusion n'est pas trop étalée, le coefficient de Callier, rapport entre la densité dirigée et la densité diffuse, doit rester constant. Nous voyons également pourquoi l'indicatrice de diffusion devient plus étalée si la densité augmente.

B - Effet Callier et granularité

1°) - Etude théorique pour un échantillon très mince.

La diffusion de la lumière est un phénomène fort complexe. Pour de très grosses particules on peut appliquer les lois de la réfraction et de la diffraction ; avec de très petites particules on est dans le domaine de la diffusion de RAYLEIGH (201) ; c'est pour des particules de dimensions intermédiaires, de l'ordre de la longueur d'onde, que le phénomène est le plus complexe (202).

Précisons que la diffusion dépend de la nature physique et de la structure des particules ; par exemple, l'émulsion vierge et l'émulsion développée, qui contiennent des particules de dimension et de concentration voisines, ont des propriétés optiques différentes : l'émulsion vierge est très diffusante, ce qui lui donne un aspect "laiteux", l'émulsion développée est moins diffusante et plus absorbante ; les laques d'argent" constituées par de la poudre très fine d'argent obtenue par broyage mécanique et dispersée dans un liant, sont réfléchissantes et font des peintures d'aspect brillant. L'argent dans l'émulsion développée a les caractères des métaux très divisés obtenus par voie chimique : cette structure donne aux grains d'argent des propriétés de "pièges à lumière", c'est-à-dire de corps noirs. Nous admettons donc qu'un grain d'argent absorbe complètement la lumière qu'il reçoit et la transforme en chaleur : c'est un petit écran opaque, auquel s'appliquent les lois de la diffraction.

La théorie que nous allons exposer est applicable à un échantillon infiniment mince ; elle s'inspire des études faites par P. VERNIER. Nous utiliserons essentiellement le théorème de ZERNIKE (204) d'après lequel,

pour une source incohérente, la fonction de cohérence partielle de la lumière reçue par l'objet est la transformée de Fourier de la répartition angulaire des énergies reçues. Suivant une idée exprimée par G.L. ROGERS (205) nous pouvons faire le raisonnement suivant : à la traversée de l'échantillon cette fonction de cohérence est modifiée, ce qui se traduit par une nouvelle répartition angulaire de la lumière quittant l'échantillon.

Une onde plane se propageant suivant la direction (β,γ) a pour expression dans le plan de l'échantillon (Fig. 30).

$$a(y,z,t) = a_o \, e^{2i\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\beta y + \gamma z}{\lambda}\right)}$$

On peut lui faire correspondre le "vecteur de Fresnel" :

$$a(y,z) = a_o \, e^{-2i\pi \frac{\beta y + \gamma z}{\lambda}}$$

La fonction de cohérence partielle est l'autocorrélation de $a(y,z)$. On a donc :

$$\overline{a(y,z)\, a^*(y-\tau, z-\tau')} = \overline{a_o \, e^{-2i\pi \frac{\beta y+\gamma z}{\lambda}} \; a_o^* \, e^{2i\pi \frac{\beta(y-\tau)+\gamma(z-\tau')}{\lambda}}} =$$

$$= \overline{a_o a_o^* \, e^{-2i\pi \frac{\beta\tau+\gamma\tau'}{\lambda}}} = \overline{a_o a_o^*} \, e^{-2i\pi \frac{\beta\tau+\gamma\tau'}{\lambda}}$$

$a_o a_o^*$ est l'énergie reçue. En intégrant pour l'ensemble de la source :

$$\Gamma(\tau,\tau') = \iint_{\beta^2+\gamma^2 \leq 1} \mathcal{E}(\beta,\gamma) \, e^{-2i\pi \frac{\beta\tau+\gamma\tau'}{\lambda}} \, d\beta d\gamma$$

C'est le théorème de Zernike : la fonction de cohérence $\Gamma(\tau,\tau')$ est la transformée de Fourier de la répartition angulaire des énergies $\mathcal{E}(\beta,\gamma)$. Si nous posons :

$$\nu = \beta/\lambda,$$
$$\mu = \gamma/\lambda,$$
$$\text{et} \quad E(\nu,\mu) \begin{cases} = \lambda^2 \, \mathcal{E}(\lambda\nu, \lambda\mu) \text{ si } \nu^2+\mu^2 < 1/\lambda^2 \\ = 0 \quad \text{si } \nu^2 + \mu^2 > 1/\lambda^2 \end{cases},$$

nous pouvons écrire la relation sous la forme d'une transformation de Fourier classique :

$$\Gamma(\tau,\tau') = \iint_{-\infty}^{+\infty} E(\nu,\mu) \, e^{-2i\pi(\nu\tau+\mu\tau')} \, d\nu d\mu$$

Dans la suite nous emploierons, tantôt le système de variables (β,γ), tantôt le système (ν,μ).

L'objet étant très mince, nous pouvons considérer la fonction du point $\mathcal{O}(y,z)$, qui représente la transparence complexe (rapport des amplitudes complexes et non des intensités). Après traversée de l'objet la nouvelle amplitude $a'(y,z)$ est donnée par :

$$a'(y,z) = a(y,z) \cdot \mathcal{O}(y,z)$$

et la nouvelle fonction de cohérence est $\Gamma'(\tau,\tau')$:

$$\Gamma'(\tau,\tau') = \overline{a'(y,z)\, a'^{*}(y-\tau,\, z-\tau')}$$
$$= \overline{a(y,z)\, a^{*}(y-\tau,z-\tau')\; \mathcal{O}(y,z)\, \mathcal{O}^{*}(y-\tau,z-\tau')}$$

Les fonctions aléatoires $a(y,z)$ et $\mathcal{O}(y,z)$ étant indépendantes, les fonctions de y et z $a(y,z)\, a^{*}(y-\tau,z-\tau')$ et $\mathcal{O}(y,z)\, \mathcal{O}^{*}(y-\tau,\, z-\tau')$ le sont aussi et l'on a (162, p. 58) :

$$\Gamma'(\tau,\tau') = \overline{a(y,z)\, a^{*}(y-\tau,z-\tau')}\; \overline{\mathcal{O}(y,z)\, \mathcal{O}^{*}(y-\tau,z-\tau')}$$
$$\Gamma'(\tau,\tau') = \Gamma(\tau,\tau')\, R(\tau,\tau')$$

où $R(\tau,\tau')$ est la fonction d'autocorrélation de $\mathcal{O}(y,z)$.

Si nous prenons la transformée de Fourier des deux membres de l'équation précédente, nous obtenons :

$$E'(\nu,\mu) \begin{cases} = E(\nu,\mu) \ast S(\nu,\mu) \text{ si } \nu^2+\mu^2 < 1/\lambda^2 \\ = 0 \text{ si } \nu^2+\mu^2 > 1/\lambda^2 \end{cases}$$

La répartition angulaire des énergies après traversée de l'échantillon est égale au produit de convolution de l'ancienne par le spectre de Wiener de $\Theta(y,z)$. Si l'on prend comme variables β et γ, la relation :

$$E' = E * S$$

peut s'écrire :

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} * D$$

où $$D(\beta,\gamma) = \frac{1}{\lambda^2} \; S\left(\frac{\beta}{\lambda}, \frac{\gamma}{\lambda}\right)$$

La fonction que nous avions appelée $D(\beta,\gamma,\beta',\gamma')$ s'écrit ici $D(\beta'-\beta, \gamma'-\gamma)$: le principe de réciprocité est donc vérifié si $D = \tilde{D}$, ce qui est le cas puisque la fonction D est proportionnelle au spectre de Wiener d'un processus isotrope. La relation (VI - 1) peut alors s'écrire d'une façon condensée :

$$T = \frac{K\left[F * D * P\right]_{\beta=\gamma=0}}{K\left[F * P\right]_{\beta=\gamma=0}} \qquad (VI - 2)$$

où les intégrales des produits de convolution sont limitées au domaine où $\beta^2 + \gamma^2 \leqslant 1$.

La valeur moyenne de Θ n'est pas nulle :

$$S(\nu,\mu) = |\overline{\Theta}|^2 \; \delta(\nu,\mu) + s(\nu,\mu)$$

$$D(\beta,\gamma) = |\overline{\Theta}|^2 \; \delta(\beta,\gamma) + \frac{1}{\lambda^2} \; s\left(\frac{\beta}{\lambda}, \frac{\gamma}{\lambda}\right)$$

Si l'échantillon est éclairé en lumière parallèle :

$$\mathcal{E}(\beta,\gamma) = K\,\delta(\beta,\gamma)$$

et l'on obtient :

$$\mathcal{E}'(\beta,\gamma) = K\,|\overline{\Theta}|^2 \; \delta(\beta,\gamma) + \frac{K}{\lambda^2}\, s\left(\frac{\beta}{\lambda}, \frac{\gamma}{\lambda}\right)$$

Le premier terme représente la lumière spéculaire, transmise sans déviation, et le deuxième terme la lumière diffuse. Nous voyons pourquoi la surface de l'émulsion ne diffuse que dans un cône de demi-angle au sommet 7° environ : à un angle θ correspond en effet :

$$\alpha = \cos\theta$$

d'où $$\beta^2 + \gamma^2 = 1 - \alpha^2 = \sin^2\theta$$

d'où $$\sin\theta = \sqrt{\lambda^2\nu^2 + \lambda^2\mu^2} = \sqrt{\nu^2 + \mu^2}$$

et si l'on pose $\rho = \sqrt{\nu^2 + \mu^2}$,

$$\sin\theta = \lambda\rho$$

En tenant compte à la fois de la courbe d'émission spectrale de la lampe (tungstène à 2850°K) et de la courbe de sensibilité spectrale du photomultiplicateur (Radiotechnique 51 AVP), on a un maximum pour $\lambda = 0{,}54$ microns, ce qui nous donne $\rho = 230$ mm^{-1} pour $\theta = 7°$. Les irrégularités de surface ne contiennent donc de façon notable que des fréquences spatiales inférieures à 200 mm^{-1} environ. Ceci est dû au fait que seuls les gros amas de grains produisent des déformations de la surface, les petits grains n'ayant pas d'effet ; ce phénomène est d'ailleurs bien visible sur la Fig. 11 (p. 47).

Pour la transmission dirigée, plutôt que d'employer la formule (VI - 2) il suffit d'écrire :

$$T_{//} = \frac{K\iint_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\left[|\bar{\omega}|^2 \quad \delta(\beta,\gamma) + \frac{1}{\lambda^2}\ s\left(\frac{\beta}{\lambda}, \frac{\gamma}{\lambda}\right)\right] d\beta d\gamma}{K\iint_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(\beta,\gamma)\, d\beta d\gamma}$$

L'intégrale au dénominateur est égale à 1 :

$$T_{//} = \iint_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\left[|\bar{\omega}|^2 \quad \delta(\beta,\gamma) + \frac{1}{\lambda^2}\ s\left(\frac{\beta}{\lambda}, \frac{\gamma}{\lambda}\right)\right] d\beta d\gamma \qquad (VI - 3)$$

$$T_{//} = |\bar{\omega}|^2$$

$$D_{//} = -\log|\bar{\omega}|^2$$

Pour la transmission diffuse :

$$\phi' = \int d\phi' = \iint_{\beta^2+\gamma^2 \leq 1} \varepsilon'(\beta,\gamma)\, d\gamma$$

donc $P(\beta,\gamma) = 1$ et la relation (VI - 2) nous donne :

$$T_{\#} = \frac{K \iint_{\beta^2+\gamma^2 \leq 1} \left[|\bar{\omega}|^2 \, \delta(\beta,\gamma) + \frac{1}{\lambda^2} \, s\left(\frac{\beta}{\lambda}, \frac{\gamma}{\lambda}\right) \right] d\beta d\gamma}{K \iint_{\beta^2+\gamma^2 \leq 1} \delta(\beta,\gamma) \, d\beta d\gamma}$$

$$T_{\#} = \iint_{\beta^2+\gamma^2 \leq 1} \left[|\bar{\omega}|^2 \quad \delta(\beta,\gamma) + \frac{1}{\lambda^2} \, s\left(\frac{\beta}{\lambda}, \frac{\gamma}{\lambda}\right) \right] d\beta d\gamma$$

$$T_{\#} = |\bar{\omega}|^2 + \iint_{\beta^2+\gamma^2 \leq 1} \frac{1}{\lambda^2} \, s\left(\frac{\beta}{\lambda}, \frac{\gamma}{\lambda}\right) \, d\beta d\gamma$$

ou :

$$T_{\#} = |\bar{\omega}|^2 + \iint_{\nu^2+\mu^2 \leq 1/\lambda^2} s(\nu,\mu) \, d\nu d\mu$$

$$T_{\#} = |\bar{\omega}|^2 + \int_0^{1/\lambda} s_{\omega}(\rho) \cdot 2\pi\rho \, d\rho \qquad \text{(VI - 4)}$$

$$D_{\#} = - \log T_{\#}$$

Comme nous le verrons plus en détail au chapitre IX , la granularité Selwyn est égale à l'intégrale du spectre de Wiener $s_T(\rho)$ de la transmission multiplié par une fonction de pondération $W(\rho)$:

$$G^2 = \int_0^{+\infty} W(\rho) \quad s(\rho) \quad d\rho \qquad \text{(VI - 5)}$$

Pour une tache de 24μ par exemple, la fonction $W(\rho)$ a un maximum pour $\rho = 18{,}4\,mm^{-1}$.

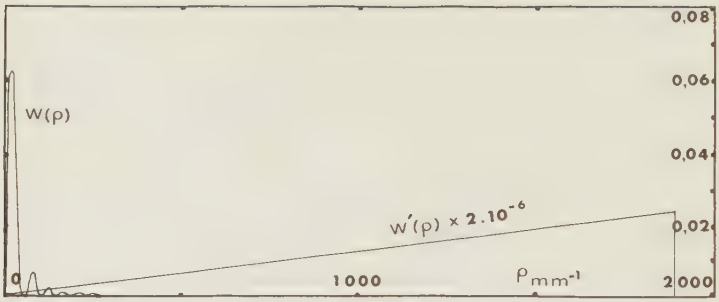


Fig. 42

Des relations (VI - 3) et (VI - 4) nous tirons :

$$T_{\#} - T_{//} = \int_0^{1/\lambda} s_{\Theta}(\rho) \cdot 2\pi\rho \, d\rho$$

ou

$$T_{\#} - T_{//} = \int_0^{+\infty} W'(\rho) \, s_{\Theta}(\rho) \, d\rho \qquad (VI - 6)$$

où

$$W'(\rho) \begin{cases} = 2\pi\rho & \text{si } \rho < \frac{1}{\lambda} \\ = 0 & \text{si } \rho > \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

La Fig. 42 représente les deux fonctions $W(\rho)$ et $W'(\rho)$ pour une tache de 24μ de diamètre et pour $\lambda = 0{,}53\mu$. Dans un cas la fonction qui intervient est la transmission T, dans l'autre cas c'est la transparence complexe Θ , et l'influence de la densité et de l'épaisseur de l'émulsion n'est pas la même sur les deux phénomènes, mais nous voyons ici la raison essentielle du désaccord entre les mesures de granularité et d'effet Callier : la pondération des fréquences spatiales est complètement différente.

Pour des émulsions dont les grains ne sont pas trop fins ni trop gros, la mesure du coefficient de Callier peut donner des indications à peu près valables sur la dimension des grains mais les autres phénomènes qui influent sur la granularité passent inaperçus parce qu'ils

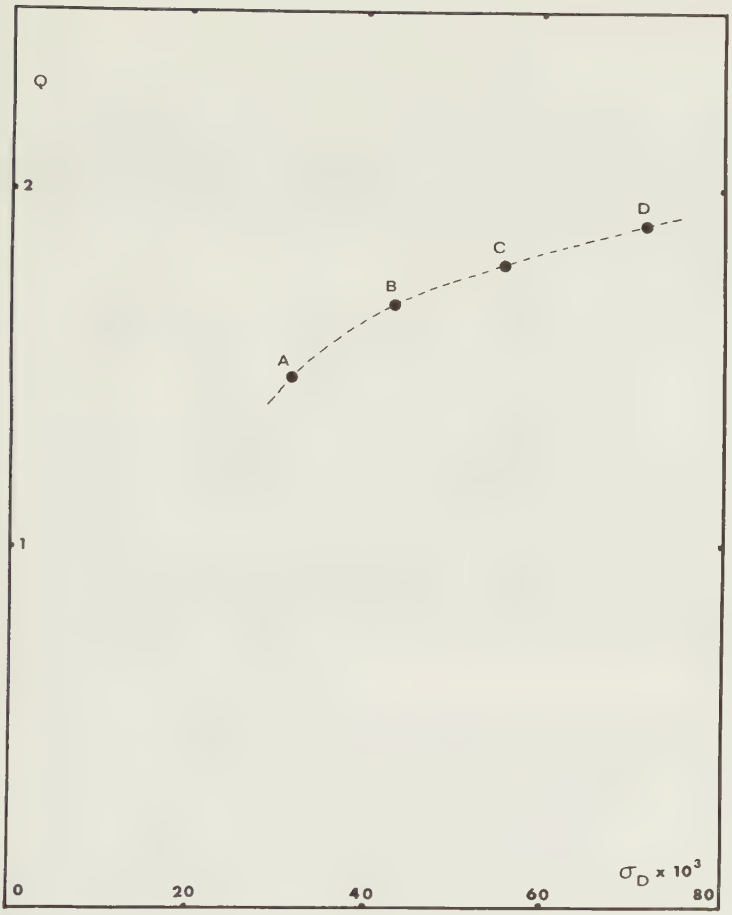


Fig. 43 - Influence de la granularité sur
le coefficient de Callier

n'agissent pas sur les hautes fréquences spatiales. Par exemple (128), si l'on fait la copie d'un négatif très granuleux sur un positif au lieu d'exposer celui-ci uniformément, on modifie la granularité mais le coefficient de Callier reste le même.

2°) - Etude expérimentale

La Fig.43 montre qu'en effet le coefficient de Callier est d'autant plus grand que l'émulsion est plus granuleuse. Nous avons fait d'autre part l'expérience suivante: deux échantillons d'émulsion radiographique ont été exposés, l'un avec des rayons X mous (80 KV), l'autre avec des rayons X durs (260 KV), et nous avons mesuré la granularité et le coefficient de Callier. Les résultats sont les suivants :

Tension	80 KV	260 KV
σ_D (12µ) . 10^3	59	68
σ_D (24µ) . 10^3	34,8	42,4
Q - 1ère mesure	1,34	1,40
Q - 2ème mesure	1,40	1,38

La granularité quadratique moyenne diffère de 15% avec la tache de 12µ et de 25% avec la tache de 24µ ; le coefficient de Callier est inchangé aux erreurs d'expérience près.

N.B. Les relations (VI - 5) et (VI - 6) peuvent s'écrire à partir de l'autocorrélation. D'après le théorème de Parseval nous avons :

$$\sigma^2 = \int_0^{+\infty} w(\theta)\, r_T(\theta)\, d\theta$$

et

$$T_{\perp} - T_{//} = \int_0^{+\infty} w'(\theta)\, r_{\Theta}\ (\theta)\, d\theta$$

où $w(\theta)$ et $w'(\theta)$ sont les transformées de Hankel de $W(\rho)$ et $W'(\rho)$. Comme l'avait déjà remarqué P. VERNIER (194) des corrélations à distance assez grande interviennent pour la granularité, et seules les corrélations à courte distance interviennent dans l'effet Callier.

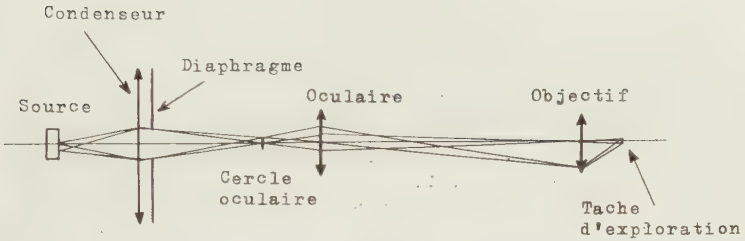

Condenseur
Diaphragme
Source
Oculaire
Objectif
Cercle
oculaire
Tache
d'exploration

Fig. 44

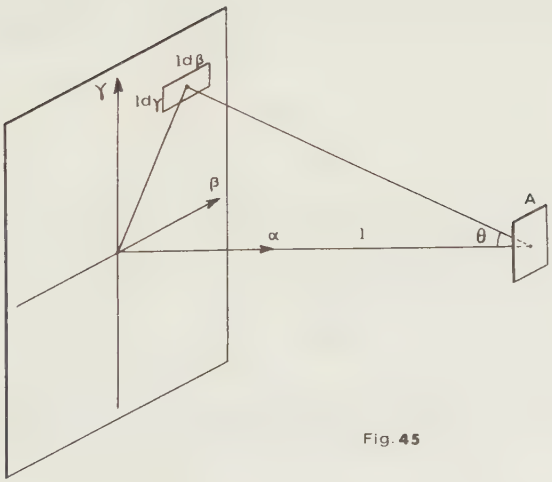

ldβ
ldγ
γ
β
α
l
θ
A

Fig. 45

C - Influence des ouvertures numériques

1°) - Mesures de densité

L'appareil décrit au chapitre IV peut servir à mesurer des transmissions ou des densités : comme nous l'avons vu, il suffit de mesurer des rapports d'intensité de courant, en interposant au besoin des filtres gris neutre étalonnés pour se ramener dans le domaine de linéarité du photomultiplicateur. Comme le montre la Fig. 44 , le condenseur fait l'image de la source dans le plan du cercle oculaire du microscope d'éclairage : la face avant de l'objectif est conjuguée de la source : elle joue donc le rôle d'une source incohérente éclairant directement l'échantillon. D'autre part les rayons lumineux , sauf à l'intérieur de l'objectif, sont peu éloignés sur l'axe : on peut négliger les différences d'absorption et l'on peut assimiler la face avant de l'objectif à un disque de luminance uniforme.

Nous avons vu que le fait de recueillir toute la lumière diffusée donnait $P(\beta',\gamma') \equiv 1$. On peut démontrer facilement que si l'échantillon est éclairé en lumière parfaitement diffuse, on a de même $F(\beta,\gamma) \equiv 1$. L'éclairage est parfaitement diffus si de l'échantillon on voit dans tout l'angle solide 2π une source de luminance uniforme émettant suivant la loi de Lambert. La forme de cette source n'a pas d'importance ; supposons-la plane (Fig. 45). Nous pouvons appliquer les équations (IV - 3) et (IV - 4). Pour un élément de surface dS de la source on a :

$$d\Phi = LdU = L \frac{A\, dS \cos^2\theta}{r^2} = \frac{LA\, dS}{l^2}$$

or $dS = l d\beta \cdot l d\gamma$ donc $\frac{dS}{l^2} = d\beta d\gamma$

$$d\Phi = L\, A\, d\beta\, d\gamma$$

Donc : $K = L\, A$ et $F(\beta,\gamma) \equiv 1$

Si les ouvertures numériques $N = \sin u$ et $N' = \sin u'$ sont inférieures à 1, on a alors :

$$F_N(\beta,\gamma) \begin{cases} = 1 & \text{si} \quad \beta^2 + \gamma^2 < N^2 \\ = 0 & \text{si} \quad \beta^2 + \gamma^2 > N^2 \end{cases}$$

$$P_{N'}(\beta',\gamma') \begin{cases} = 1 \text{ si} & \beta'^2+\gamma'^2 < N'^2 \\ = 0 \text{ si} & \beta'^2+\gamma'^2 > N'^2 \end{cases}$$

et la transmission mesurée est donnée par :

$$T(N,N') = \frac{\left[F_N * D * P_{N'}\right]_{\beta=\gamma=0}}{\left[F_N * P_{N'}\right]_{\beta=\gamma=0}} \qquad (VI - 7)$$

Comme $F_N(\beta,\gamma) = P_N(\beta,\gamma)$, il est clair que si l'on échange les valeurs des ouvertures numériques, le résultat est inchangé :

$$T(N'N) = T(N,N')$$

ce qui vérifie le principe de réciprocité.

La formule (VI - 7) permet de calculer $T(N,N')$ si l'on connait $D(\beta,\gamma)$. On peut se faire une idée de l'allure du résultat au moyen d'un raisonnement simple (Fig. 46). Considérons la courbe représentant le flux ϕ_0 reçu en l'absence de l'échantillon en fonction de N' pour N = cte : elle a un point anguleux pour N' = N. Celle représentant le flux ϕ reçu en présence de l'échantillon est affine de la précédente si l'échantillon n'est pas diffusant ; la présence de lumière diffuse rend le point anguleux moins accusé et celui-ci disparaît même s'il n'y a plus du tout de lumière spéculaire. Les courbes représentant T et D ont donc un point anguleux pour N' = N. Si l'on fait varier à la fois N et N', on a le réseau de courbes que représente la Figure 46.

L'étude expérimentale a été faite avec des objectifs spéciaux munis d'un diaphragme-iris dans un plan conjugué de la face avant, ce qui permettait de faire varier l'ouverture numérique entre 0,15 et 0,65. De cette façon les mesures étaient plus rapides et plus faciles qu'avec plusieurs objectifs d'ouvertures numériques différents. Pour les mesures l'échantillon était mis en mouvement, ce qui donnait une valeur moyenne. L'expérience montre une petite variation du résultat si le rapport entre la tache d'éclairage et la tache de mesure varie, ceci étant dû aux diffusions multiples dans l'émulsion ; pour rendre les résultats plus reproductibles et plus comparables, nous avons toujours pris une tache d'éclairage suffisamment grande devant la tache de mesure. C'est de cette façon d'ailleurs que sont toujours faites les mesures de granularité.

La Fig. 47 montre un exemple de courbe expérimentale, obtenue avec l'émulsion C. Ces courbes sont analogues à celles obtenues par P. VERNIER (193). Si l'on échange N et N', la valeur de D reste sensiblement la même : le principe de réciprocité est vérifié.

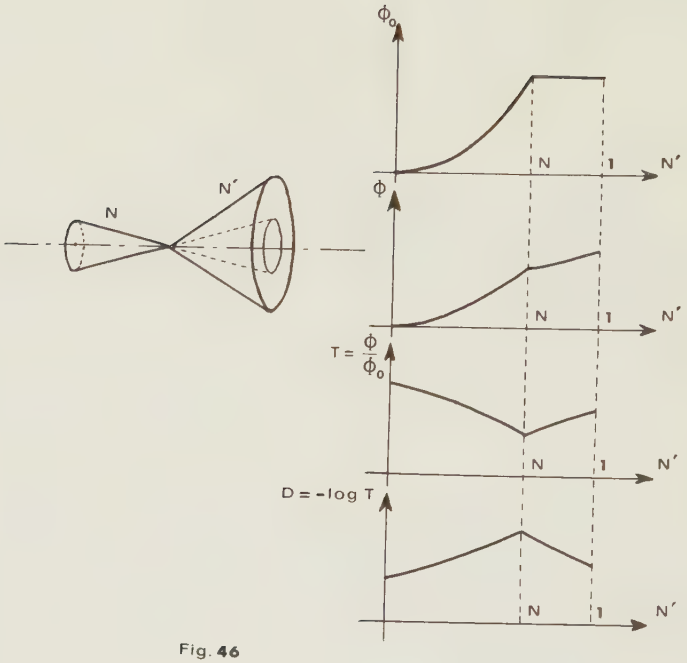
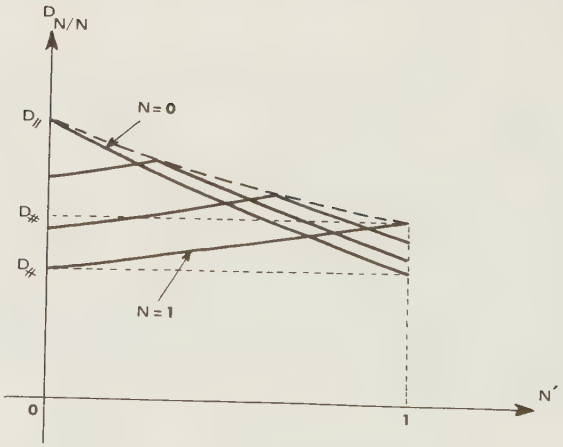

N
N'
Φ_0
Φ
N
1
N'
$T = \frac{\Phi}{\Phi_0}$
D = -log T

Fig. 46


$D_{N/N}$
N=0
$D_{//}$
$D_{\not\parallel}$
$D_{\not/\!/}$
N=1
0
1
N'

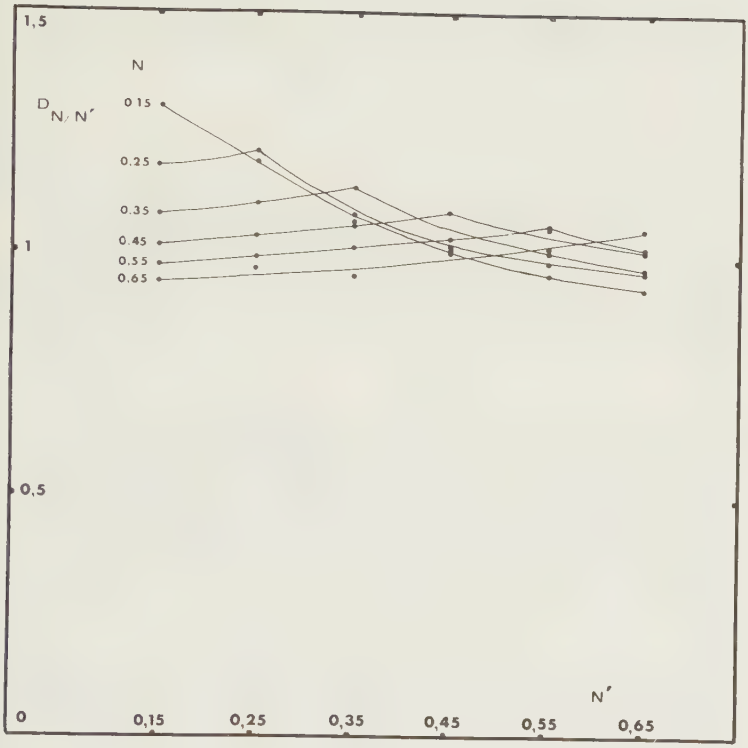


Fig. 47 - Influence des ouvertures numériques sur la densité mesurée.

2°) - Mesures de granularité

Dans les mesures de granularité quadratique moyenne n'interviennent plus le flux lumineux ϕ, la transmission T ou la densité D, mais les fluctuations de ces quantités, représentées par σ_ϕ , σ_T , σ_D, avec les relations:

$$\sigma_D = \frac{\sigma_T}{\bar{T}} = \frac{\sigma_\phi}{\bar{\phi}}$$

Si la loi de variation de σ_ϕ en fonction de N et N' est la même que celle de ϕ, σ_D reste constant ; sinon il apparaît des variations de σ_D en fonction de N et N'. Pour voir ce que donne l'expérience, nous avons fait un certain nombre de mesures dont les Fig. 48 à 51 montrent quelques exemples. Les résultats et leur interprétation sont assez complexes ; plusieurs phénomènes différents semblent se superposer :

a) - Pour de faibles valeurs de N, la courbe $\sigma_D = f(N')$ traverse les autres courbes, comme on le voit surtout sur les Fig. 48 et 49. Ce phénomène est mal reproductible ; il apparaît surtout si la tache d'exploration est très petite et s'atténue si les réglages sont faits avec soin. On peut admettre que ce phénomène est le résultat des défauts d'alignement des microscopes, lesquels en effet prennent d'autant plus d'importance que la tache est plus petite et que le faisceau est moins ouvert. Ce phénomène ne vérifie pas du tout le principe de réciprocité.

b) - Le phénomène le plus important est une variation de σ_D en fonction de N et N' conformément au schéma représenté par la Fig. 52 . Si $N' < N$, σ_D ne dépend pas de N', et si $N < N'$, σ_D ne dépend pas de N :

$$\sigma_D = \text{cte} \cdot f\left[\max(N,N')\right]$$

En faisant l'expérience avec les 4 émulsions A, B, C, D, avec des densités différentes, et avec des taches d'exploration variant de 1,7 à 100 microns de diamètre, c'est sensiblement la même loi f qui a été obtenue. Une loi de la forme $f(x) = x^n$ a été cherchée en représentant σ_D en fonction de N pour $N' = 0,15$ pour les émulsions A, B, C et D : on obtient en effet quatre droites parallèles dont la pente est sensiblement égale à $-0,25$ (Fig.53) ce qui nous donne la loi empirique suivante :

$$\sigma_D = \text{cte}\left[\max(N,N')\right]^{-1/4}$$

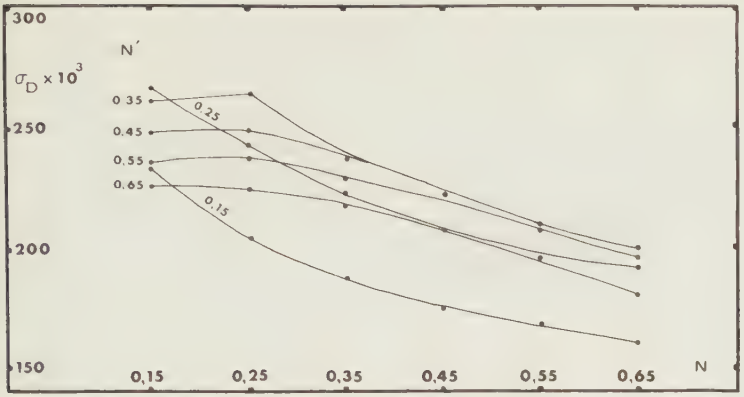


Fig. 48 - Emulsion C - Tache circulaire ∅ 1,7µ

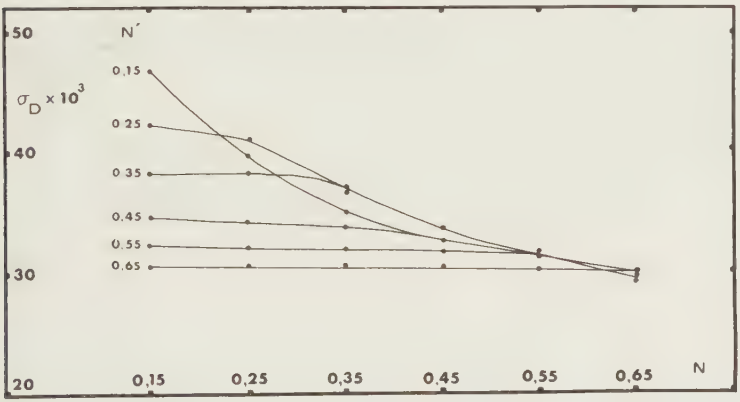


Fig. 49 - Emulsion C - Tache circulaire ∅ 24µ

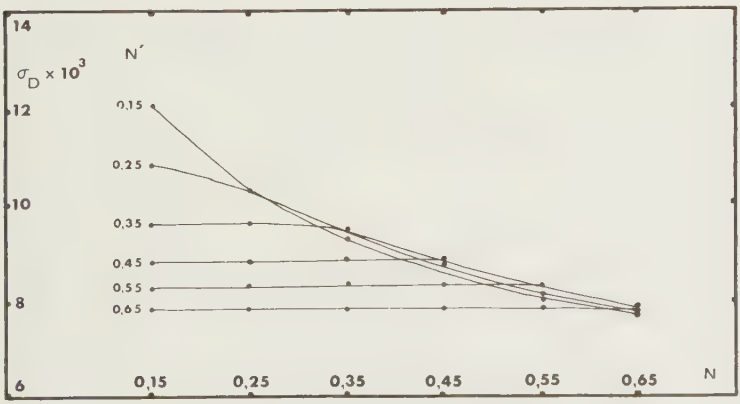


Fig. 50 - Emulsion C - Tache circulaire ∅ 100µ

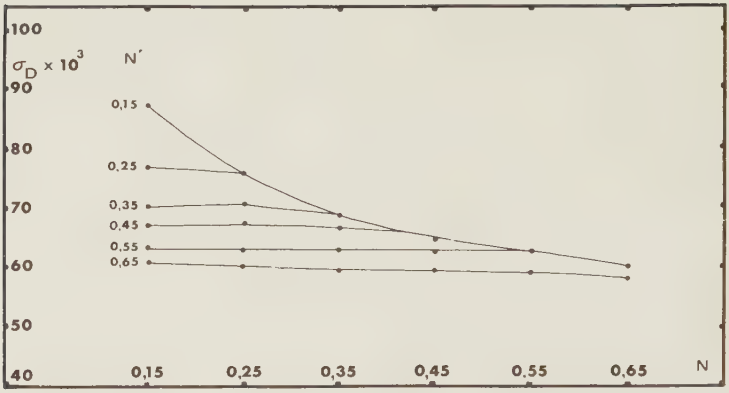


Fig. 51 - Emulsion D - Tache circulaire ∅ 24µ

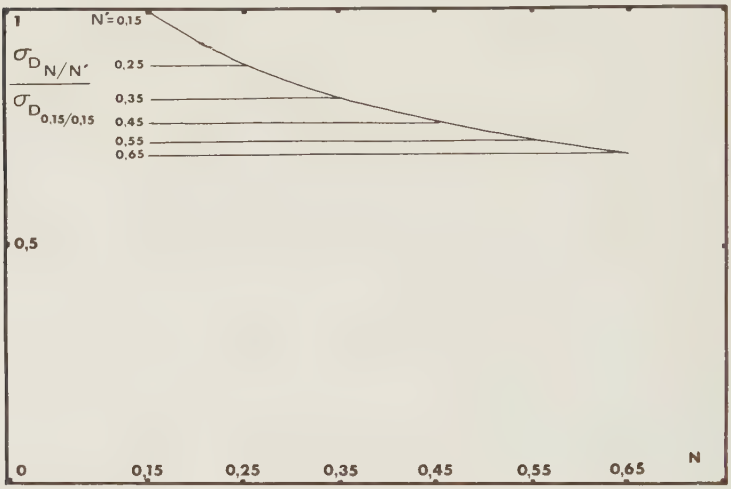


Fig. 52

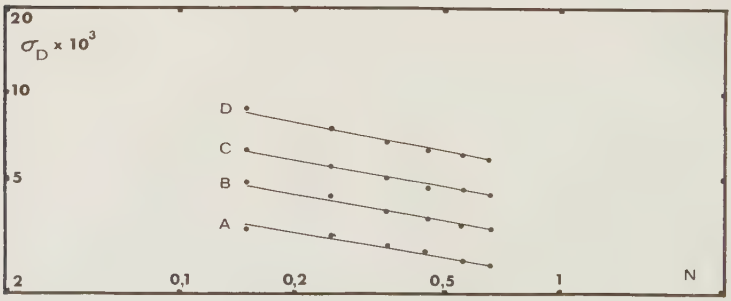


Fig. 53

L'interprétation de ce résultat est difficile mais il semble qu'il intervienne surtout un facteur géométrique dû à l'épaisseur de l'émulsion : si N et N' varient, la structure à trois dimensions de la tache d'exploration est modifiée. En effet, avec un échantillon d'émulsion expérimentale très mince (4 microns) nous avons obtenu un résultat différent, que représente la Fig. 54 : la varia tion est alors beaucoup moins grande.

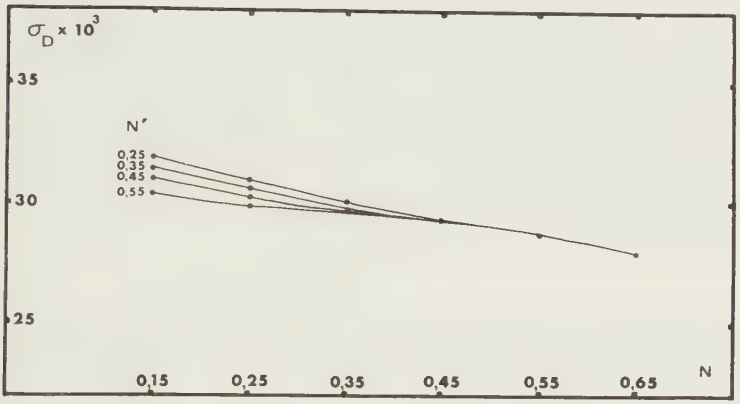


Fig. 54

VII - PROBLEMES D'ECHANTILLONNAGE

Dans la mesure des spectres de Wiener on remarque souvent des fluctuations d'allure irrégulière qui se modifient si l'on déplace la zone explorée de l'échantillon. La Fig.55 en montre un exemple : les deux courbes représentées ont été tracées avec le même échantillon de film, en déplaçant seulement la zone explorée, ce qui montre le caractère aléatoire de ces fluctuations. R. CLARK-JONES (71), A. HAUTOT et L. BERWART (124), F.J.WALL et B.G. STEEL (206) ont signalé ce phénomène sans en donner d'expression quantitative ni d'explication théorique. Or, ce phénomène est important car il limite souvent de façon gênante la précision des mesures ; il faut donc déterminer les facteurs sur lesquels on peut agir pour rendre la précision des mesures aussi bonne que possible.

L'expérience montre que ces fluctuations sont d'autant plus petites que la zone explorée de l'échantillon est plus grande : il s'agit donc d'une erreur d'estimation statistique. En effet, pour connaître parfaitement le spectre de Wiener d'un processus aléatoire ergodique, il faudrait au moins connaître complètement un échantillon donné, c'est-à-dire connaître la valeur de la fonction pour toutes les valeurs de la variable entre $-\infty$ et $+\infty$. On ne peut connaître qu'un nombre fini d'échantillons et ceux-ci sont limités : pour chaque échantillon la valeur de la fonction n'est connue que dans un domaine fini de valeurs de la variable.

Dans le cas de l'appareil décrit au chapitre IV, on ne connaît la fonction $T(x,y)$ que sur la circonférence explorée ; avec l'analyse harmonique optique, on ne connaît $T(x,y)$ que dans la portion de surface qui est traversée par le faisceau lumineux.

Une idée générale sur la précision des résultats peut se déduire des théorèmes de C.E.SHANNON et de D. GABOR sur la théorie de l'information (59, p.37-45) (60 , p. 75-109) : le contenu d'information d'un message est d'autant plus grand que le message est plus long et que la bande de fréquences admise est plus large.
La durée du message correspond à la dimension de l'échantillon ; la notion de largeur de la bande est liée à la résolution de l'analyse en fréquences : dans les méthodes microdensitométriques on utilise un filtre passe-bande, et dans l'analyse harmonique optique la résolution est limitée par les diaphragmes (Fig. 63). Des renseignements sur ce type de problème se trouvent dans les articles de R.M. FANO (207), de M.R. SCHROEDER et B.S. ATAL (208) et dans le livre de R.B. BLACKMAN et J.W. TUKEY "The Measurement of Power Spectra" (209).

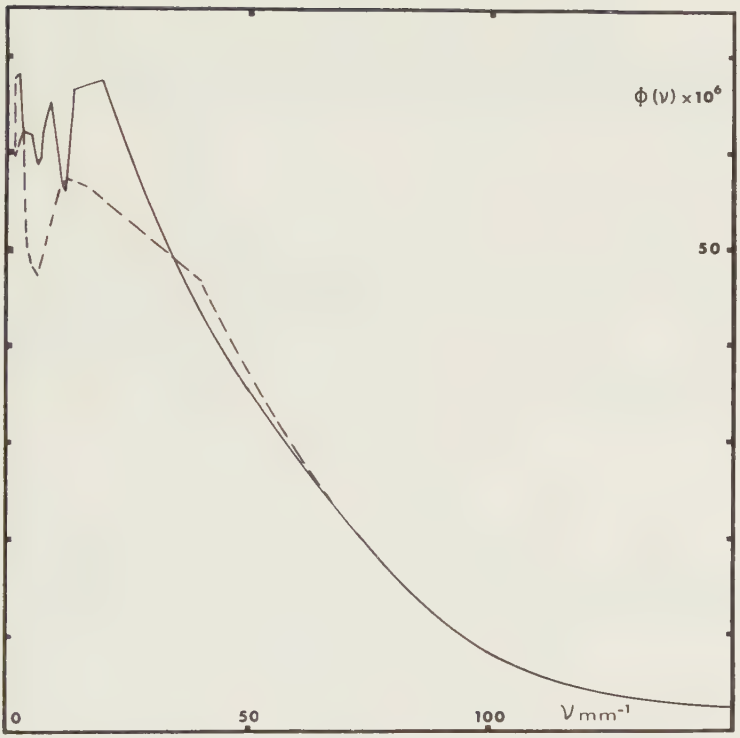


Fig. 55 - Exemple d'erreurs d'échantillonnage

Nous étudierons le problème en trois étapes : estimation d'une valeur moyenne, puis d'une valeur quadratique moyenne, enfin d'un spectre de Wiener, chaque étape utilisant les résultats de la précédente. Nous ferons le calcul dans le cas d'une fonction aléatoire d'une seule variable et nous généraliserons au cas de plusieurs variables.

A - Estimation d'une valeur moyenne

Soit une fonction aléatoire $f(x)$ à valeurs réelles, stationnaire et ergodique, dont on connaît un échantillon de longueur L, entre $-L/2$ et $+L/2$. On peut faire une estimation de f, que nous appellerons $\bar{f}_L$, de la façon suivante :

$$\bar{f}_L = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x)\, dx$$

et l'on a $\lim_{L \to \infty} \bar{f}_L = \bar{f} = E(f) = E(\bar{f}_L)$

Nous pouvons suivre les fluctuations de $\bar{f}_L$ le long d'un même échantillon. Soit $\bar{f}_L(x)$ la fonction définie comme suit :

$$\bar{f}_L(x) = \frac{1}{L} \int_{x-L/2}^{x+L/2} f(x')\, dx'$$

Cette fonction n'est autre que le produit de convolution de f par une fonction créneau que nous appellerons $g(x)$:

$$g(x) = \frac{1}{L} \quad \text{si} \quad |x| < \frac{L}{2}$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad |x| > \frac{L}{2}$$

$$\bar{f}_L(x) = (f * g)(x)$$

Le spectre de Wiener de $\bar{f}_L(x)$ est égal à $s(\nu).\left[G(\nu)\right]^2$, $s(\nu)$ étant le spectre de Wiener de $f(x)$ et $G(\nu)$ la transformée de Fourier de $g(x)$. D'où l'on déduit la formule :

$$\sigma^2(\bar{f}_L) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\nu) \left[G(\nu)\right]^2 d\nu \qquad \text{(VII - 1)}$$

qui exprime l'erreur d'échantillonnage dans l'estimation d'une valeur moyenne.

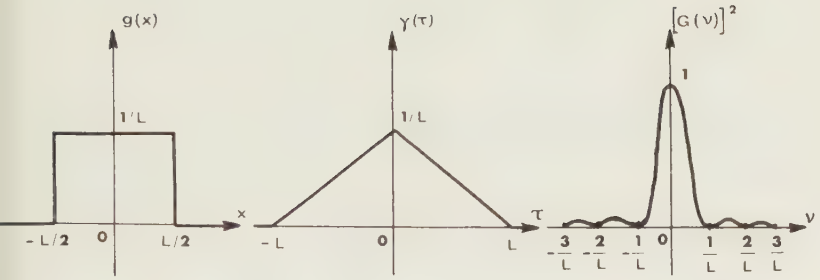


Fig. 56

La Fig.56 représente les trois fonctions qui jouent un rôle important dans l'étude de l'échantillonnage. La première est la fonction $g(x)$. La seconde, que nous appellerons $\gamma(\tau)$, est le produit de convolution de $g(x)$ par elle-même.

$$\gamma = g^{2*}$$

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{L}\left(1 - \frac{|\tau|}{L}\right) \text{ si } |\tau| < L$$

$$= 0 \text{ si } |\tau| > L$$

La troisième est $\left[G(\nu)\right]^2$. C'est la transformée de Fourier de $\gamma(\tau)$. D'après (II-1) nous avons :

$$\left[G(\nu)\right]^2 = \frac{\sin^2 \pi \nu L}{\pi^2 \nu^2 L^2}$$

Nous allons maintenant retrouver la formule (VII - 1) par une autre méthode. Le processus étant ergodique, on peut remplacer la moyenne "le long d'un échantillon" par une espérance mathématique :

Soit à déterminer $E\left[(\bar{f}_L - \bar{f})^2\right]$:

$$(\bar{f}_L - \bar{f})^2 = \overline{\Delta f}_L^{\,2} = \left[\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\,dx\right]^2$$

$$= \frac{1}{L^2}\iint_{-L/2}^{L/2} \Delta f(x)\ \Delta f(y)\ \ dx\,dy$$

Si l'on pose $y = x - \tau$:

$$\overline{\Delta f}_L^{\,2} = \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{L/2} \left[\int_{x-L/2}^{x+L/2} \Delta f(x)\ \Delta f(x-\tau)\ d\tau \right] dx$$

d'où l'on déduit :

$$E\left[\overline{\Delta f}_L^{\,2}\right] = \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ \int_{x-L/2}^{x+L/2} E\left[\Delta f(x)\ \Delta f(x-\tau)\right] d\tau \right\} dx$$

$$= \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{L/2} \left[\int_{x-L/2}^{x+L/2} r(\tau)\, d\tau \right] dx$$

Le domaine d'intégration est la surface du parallélogramme que représente la Fig. 57 .

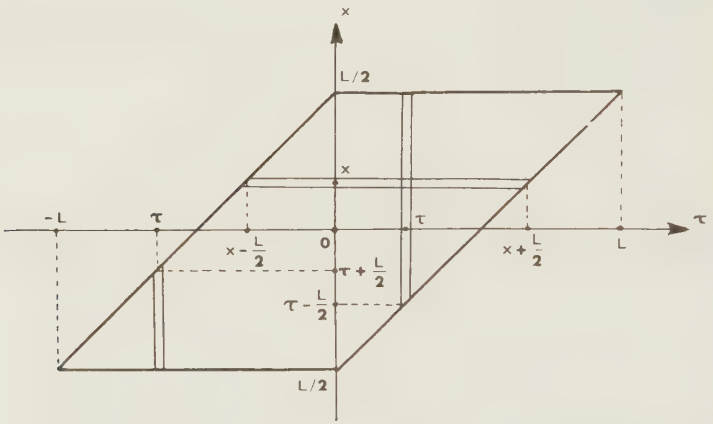


Fig. 57

On voit sur la figure qu'en intervertissant l'ordre des intégrations on obtient :

$$E\left[\overline{\Delta f}_L^{\,2}\right] = \frac{1}{L^2} \left\{ \int_{-L}^{0} r(\tau) \left[\int_{-L/2}^{\tau+L/2} dx \right] d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{L} r(\tau) \left[\int_{\tau-L/2}^{L/2} dx \right] d\tau \right\}$$

ce qui nous donne finalement :

$$E\left[\overline{\Delta f_L^2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau)\,\gamma(\tau)\,d\tau \qquad (VII - 2)$$

D'après le théorème de Parseval, cette relation est équivalente à la relation (VII - 1).

B - Estimation d'une valeur quadratique moyenne

Nous supposerons ici que f(x) est une fonction aléatoire gaussienne centrée. Les relations (VII - 1) et (VII - 2) nous donnent alors l'autocorrélation et le spectre de Wiener de $f^2(x)$:

$$r_{f^2}(\tau) = 2\left[r_f(\tau)\right]^2$$
$$s_{f^2}(\nu) = 2\left[s_f(\nu)\right]^{2*}$$

L'erreur d'échantillonnage dans l'estimation de $f^2(x)$ est donc donnée par :

$$\sigma^2(\overline{f_L^2}) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} r^2(\tau)\,\gamma(\tau)\,d\tau = 2\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(\nu)\left[G(\nu)\right]^2\,d\nu$$

C - Estimation d'un spectre de Wiener

Deux méthodes sont employées dans la détermination expérimentale des spectres de Wiener.

1°) - Première méthode

C'est celle qu'on emploie avec l'appareil décrit au chapitre IV . Elle consiste à faire un filtrage passe-bande suivi d'une détection quadratique et d'une intégration : le voltmètre électronique Ballantine est en effet constitué d'un amplificateur, d'un détecteur quadratique et d'un appareil de mesure ayant une assez grande constante de temps.

B. PICINBONO et P. FAURE (211) (212) (213) ont étudié la tendance vers la loi de Gauss d'un signal après un filtrage passe-bande. Nous admettrons pour ce calcul qu'après filtrage le signal n'est pas trop différent d'un signal

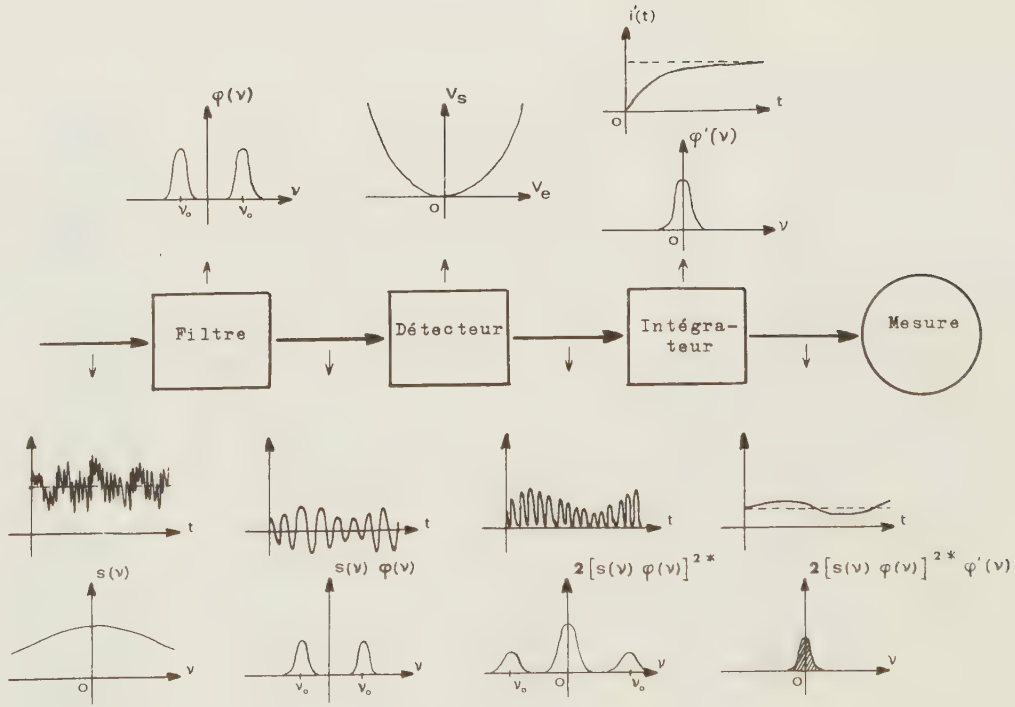


Fig. 58 - Mesure des spectres de Wiener par filtrage et détection

gaussien. D'autre part, la fréquence zéro n'est pas transmise ; nous appliquerons donc les résultats d'un paragraphe B, démontrés pour une fonction aléatoire gaussienne centrée.

Les équations que nous allons voir peuvent s'écrire indifféremment avec des variables de temps ou d'espace ; nous appellerons x la variable et ν la fréquence. Soit $\varphi(\nu)$ le gain en puissance du filtre. Si i(x) est la réponse impulsionnelle du filtre et I(ν) sa transformée de Fourier :

$$\varphi(\nu) = \left| I(\nu) \right|^2$$

La fonction i(x) est à valeurs réelles donc $I = \check{I}$; $\varphi(\nu)$ est une fonction paire.

La Fig.58 représente un schéma de l'ensemble des opérations.

- La fonction étudiée a un spectre s(ν) .

- Le signal à la sortie du filtre a pour spectre $s(\nu)\ \varphi(\nu)$.

- Après la détection quadratique le spectre est $2\left[s(\nu)\,\varphi(\nu)\right]^{2*}$.

- L'intégrateur est un filtre passe-bas dont la réponse impulsionnelle est i'(x) et le gain en puissance $\varphi'(\nu) = |I'(\nu)|^2$. Le spectre à la sortie de l'intégrateur est $2\left[s(\nu)\,\varphi(\nu)\right]^{2*}\varphi'(\nu)$.

La valeur de s lue sur l'instrument de mesure présente donc des fluctuations telles que :

$$\sigma^2(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\left[s(\nu)\ \varphi(\nu)\right]^{2*}\varphi'(\nu)\ d\nu$$

Si la bande passante du filtre n'est pas trop large autour de la fréquence centrale ν_o, on peut considérer s(ν) comme une constante :

$$2\left[s(\nu)\,\varphi(\nu)\right]^{2*} \simeq 2\left[s(\nu_o)\,\varphi(\nu)\right]^{2*} = 2\left[s(\nu_o)\right]^2\left[\varphi(\nu)\right]^{2*}$$

$$\text{donc}\quad \sigma^2(s) \simeq 2\left[s(\nu_o)\right]^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\varphi(\nu)\right]^{2*}\varphi'(\nu)\,d\nu$$

D'autre part la fonction $\left[\varphi(v)\right]^{2*}$ reste pratiquement constante dans tout le domaine où $\varphi'(v)$ n'est pas nulle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\varphi(v)\right]^{2*} \varphi'(v)\, dv \simeq \left[\varphi(v)\right]^{2*}_{v=0} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(v)\, dv$$

$$\text{or } \left[\varphi(v)\right]^{2*}_{v=0} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v')\ \varphi(v-v')\, dv'\right]_{v=0} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v')\ \overset{\vee}{\varphi}(v')\, dv' = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\varphi(v')\right]^2 dv'$$

$$\text{Donc } \sigma^2(s) = 2\left[s(v_o)\right]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\varphi(v)\right]^2 dv \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(v)\, dv$$

Appelons ε l'écart quadratique moyen relatif :

$$\varepsilon = \frac{\sigma(s)}{E(s)}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{2\left[s(v_o)\right]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\varphi(v)\right]^2 dv \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(v)\, dv}{\left[s(v_o) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v)\, dv\right]^2}$$

ce qui nous donne finalement :

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{B\,L} \qquad \text{(VII - 3)}$$

où $$B = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v)\, dv\right]^2}{2\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\varphi(v)\right]^2 dv}$$

et $$L = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(v)\, dv} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} i'(x)\, dx\right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[i'(x)\right]^2 dx}$$

Les quantités B et L sont respectivement proportionnelles à la bande passante du filtre et à la "constante de temps" du système d'analyse.

2°) - Deuxième méthode

C'est la méthode employée dans l'analyse harmonique optique ou dans la méthode de calcul de A. ZIYA AKCASU (214). On détermine d'abord la valeur de l'expression :

$$\frac{1}{L}\left[\int_{-L/2}^{L/2} \Delta f(x)\, e^{-2i\pi\nu x}\, dx\right]^2$$

Comme nous l'avons vu, cette expression ne converge pas vers une limite si $L \longrightarrow \infty$ mais, si l'on fait la convolution avec une fonction d'étalement $D(\nu)$ convenablement choisie, il y a alors convergence ; nous en verrons plus loin la raison. On a donc l'estimation suivante du spectre de Wiener :

$$s_{LD}(\nu) = \frac{1}{L}\left[\int_{-L/2}^{L/2} \Delta f(x)\, e^{-2i\pi\nu x}\, dx\right]^2 * D(\nu)$$

et $\lim_{L \longrightarrow \infty} s_{LD}(\nu) = s(\nu) * D(\nu)$

Les deux méthodes diffèrent en ce que l'ordre des opérations n'est pas le même : ici on fait d'abord l'analyse en fréquences et ensuite la convolution, dans la première méthode on déforme d'abord le spectre avec le filtre passe-bande et on fait ensuite l'analyse. Nous allons montrer l'équivalence des deux méthodes.

Dans la première méthode, si l'on travaille avec des échantillons de longueur L , on a l'estimation suivante du spectre de Wiener :

$$s_{Li}(\nu) = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \left[\Delta f * i\right]^2 dx$$

ou

$$s_{Li}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\Delta f * i) \cdot E\right]^2 dx \quad \text{(VII - 4)}$$

si

$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \qquad \text{si} \quad |x| < \frac{L}{2}$$

$$= 0 \qquad \text{si} \quad |x| > \frac{L}{2}$$

Dans la deuxième méthode, on considère l'estimation $s_{TD}(\nu)$ du spectre de Wiener définie plus haut. Si nous posons $\varphi_{\nu_o}(\nu) = D(\nu_o - \nu)$ nous avons :

$$S_{LD}(\nu_o) = \left\langle \frac{1}{L} \left[\int_{-L/2}^{L/2} \Delta f(x)\, e^{-2i\pi\nu x}\, dx \right]^2 , \varphi_{\nu_o}(\nu) \right\rangle$$

$s_{LD}(\nu_o)$ est la variance du signal après traversée d'un filtre fictif dont le gain serait égal à $\varphi_{\nu_o}(\nu)$. Si nous supposons que ce filtre a une réponse impulsionnelle i(t) dont la transformée de Fourier est I(ν) :

$$\varphi_{\nu_o}(\nu) = \left[I(\nu) \right]^2$$

$$s_{LD}(\nu_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\nu_o}(\nu) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta f(x)\ E(x)\ e^{2i\pi\nu x}\, dx \right]^2 d\nu$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[I(\nu) \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta f(x)\ E(x)\ e^{-2i\pi\nu x}\, dx \right]^2 d\nu$$

D'après le théorème de Parseval :

$$s_{LD}(\nu_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\Delta f \,.\, E) * i \right]^2 dx \qquad \text{(VII - 5)}$$

Les relations (VII-4) et (VII-5) sont très voisines. Comme le montre la Fig.59 , la fonction i(x) ne diffère de zéro de façon appréciable que dans un intervalle fini. D'après ce que nous avons vu au chapitre II , cet intervalle est d'autant plus petit que D(ν) est plus étalée (p. 24). Si L est grand devant cet intervalle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\Delta f * i)\, e \right]^2 dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\Delta f . e) * i \right]^2 dx$$

et nous avons ainsi démontré l'équivalence des deux méthodes.

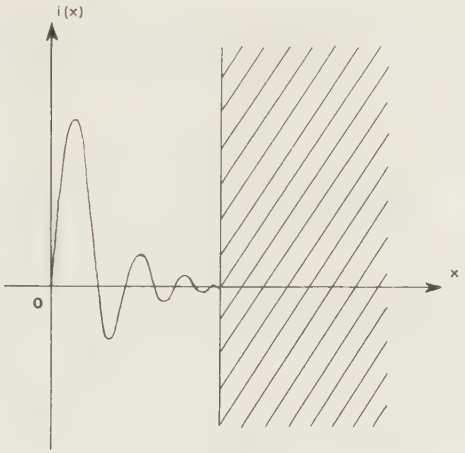


Fig. 59

Nous allons maintenant calculer l'écart quadratique moyen relatif :

$$\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2\left[\overline{(\Delta f * i)_L}\right]}{\left[\overline{(\Delta f * i)^2}\right]}$$

Appliquons la formule du paragraphe B (estimation d'une moyenne quadratique) :

$$\sigma^2\left[\overline{(\Delta f * i)_L}\right] = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[s(\nu) \left| I(\nu) \right|^2 \right]^2 d\nu =$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(\nu)\ \varphi^2(\nu)\, d\nu$$

ce qui nous donne :

$$\varepsilon^2 = \frac{2}{L} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(\nu)\ \varphi^2(\nu)\ d\nu}{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} s(\nu)\ \varphi(\nu)\ d\nu\right]^2}$$

Comme précédemment , si la bande passante n'est pas trop large : $s(\nu) \simeq s(\nu_o)$ et il reste :

$$\varepsilon^2 = \frac{2}{L} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\varphi(\nu)\right]^2\ d\nu}{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\nu)\ d\nu\right]^2}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{B\ L}$$

où

$$B = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\nu)\ d\nu\right]^2}{2\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\varphi(\nu)\right]^2\ d\nu}$$

Nous obtenons le même résultat qu'avec la première méthode. Ici L est la longueur de l'échantillon. Au paragraphe précédent L était une quantité dépendant de la réponse de l'intégrateur ; si l'on imagine une réponse représentée par une impulsion rectangulaire, L est bien égale à la longueur de cette impulsion. B est la"bande passante équivalente" du système d'analyse. Dans le cas de la première méthode la démonstration n'était valable que si $\varphi(\nu)$ était une fonction paire ; ici le résultat reste vrai si $\varphi(\nu)$ n'est pas une fonction paire, comme c'est le cas avec l'analyse harmonique optique.

D - Application pratique des formules

1°) - Fluctuations de position de l'aiguille de l'instrument.

On démontre facilement que, pour une réponse exponentielle de constante de temps θ , la formule (VII - 3) nous donne $L = 2\theta$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2B\theta}} \qquad \text{(VII - 6)}$$

Ceci est vrai si la durée d'un tour est grande devant θ ; sinon le signal doit être considéré comme périodique ; les fréquences inférieures à la fréquence fondamentale disparaissent et l'on a :

$$\varepsilon_1 < \frac{1}{\sqrt{2B\theta}}$$

On peut admettre que la relation (VII - 6) donne une estimation valable de ε_1.

2°) - Erreurs d'échantillonnage

La position moyenne de l'instrument de mesure donne une lecture d'où l'on déduit une valeur de $s(\nu_o)$ pour la fréquence spatiale $\nu_o = f_o/v$, f_o étant la fréquence centrale du filtre et v la vitesse de balayage. Si l'on déplace sur l'échantillon la circonférence explorée, la valeur mesurée de $s(\nu_o)$ varie, car elle est soumise aux fluctuations d'échantillonnage. L'écart quadratique moyen relatif ε_2 est donné par :

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{BT}} = \frac{1}{\sqrt{B'L}}$$

où B est la bande passante du filtre, T la durée d'un tour, B' la bande passante exprimée en fréquences spatiales et L la longueur de la circonférence explorée. Pratiquement, la valeur de B donnée par la formule (VII-3)diffère peu de la largeur de bande passante à 6 décibels du filtre.

L'analyse spectrale est faite en maintenant fixe le réglage du filtre et en faisant varier la vitesse d'exploration v : la bande passante B' est donc constante en valeur relative par rapport à ν_o :

$$\frac{B'}{\nu_o} = \frac{B}{f_o} = \text{cte.}$$

Dans ces conditions l'erreur d'échantillonnage est d'autant plus grande que la fréquence étudiée ν_o est plus basse, comme le montre la formule :

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{f_o}{2\pi BR}} \quad \sqrt{\frac{1}{\nu_o}}$$

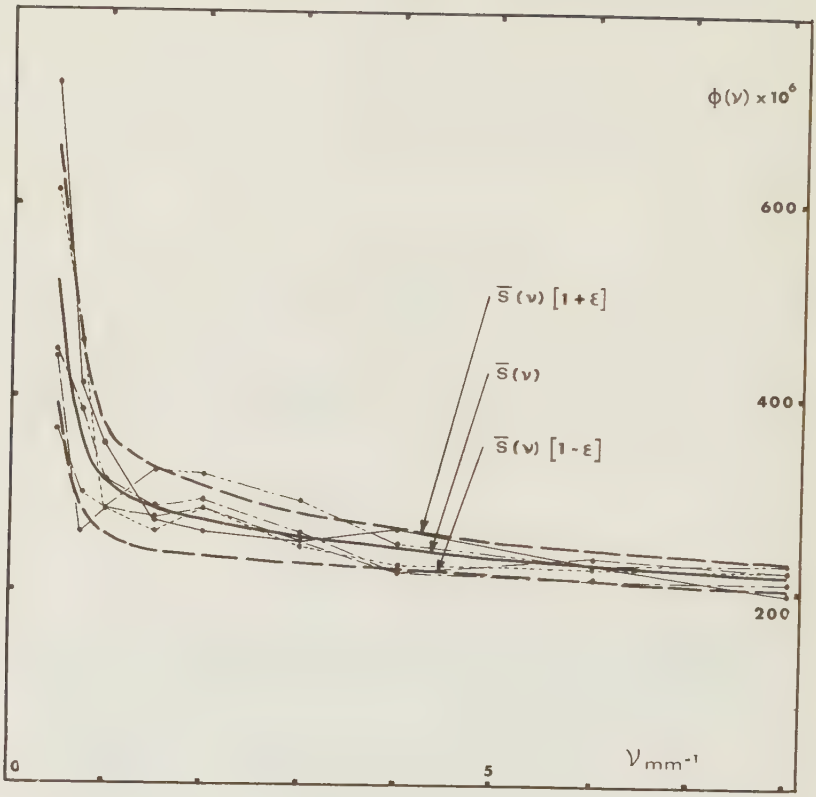


Fig. 60 - Vérification expérimentale

où R est le rayon de la circonférence explorée. La Fig. 60 montre une vérification expérimentale de cette formule. On a choisi un cercle de rayon assez petit (5,3 mm) pour que le phénomène soit bien visible. Avec le filtre utilisé, la largeur de bande passante à 6 décibels est égale à $0,32 f_o$, d'où l'on déduit :

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{1}{\nu_o}}$$

D'autres méthodes sont possibles telles que l'emploi d'un analyseur du type hétérodyne en laissant la vitesse v constante. Dans ce cas f_o et ν_o sont variables, B et B' sont constantes et la valeur de ε_2 est la même dans tout le spectre. Mais on est ramené au même problème que précédemment car si on veut étudier en détail les basses fréquences spatiales on est amené à diminuer la bande passante.

Nous voyons maintenant sur quels facteurs on peut agir pour réduire les erreurs d'échantillonnage :

a) - On peut explorer une circonférence aussi grande que possible. Nous sommes ici limités par les dimensions de l'échantillon, qui peut être par exemple un sensitogramme où les plages n'ont que 1 cm de largeur, et par les difficultés de mise au point des microscopes et de planéité de l'échantillon : tout dépend de la gamme de fréquences que l'on veut étudier. Si l'on veut mesurer le spectre de Wiener d'une émulsion photographique entre 1 et 100 mm^{-1} , il faudra prendre le petit porte-échantillon (de diamètre 20 mm) pour avoir une bonne précision dans les fréquences élevées ;si l'on veut étudier entre 0,1 et 10 mm^{-1} un film radiographique exposé avec écran renforçateur, une légère défocalisation aura moins d'importance et l'on choisira plutôt le grand porte-échantillon, de diamètre 80 mm.

b) - On peut augmenter la largeur de bande passante du filtre. Mais on est placé devant l'alternative suivante : si la bande est étroite les erreurs d'échantillonnage sont grandes, si elle est large la résolution de l'analyse est faible et le spectre est déformé ; la quantité d'information donnée par l'échantillon de longueur L est exploitée différemment, mais reste la même. Il y a donc une valeur optimale à choisir pour la bande passante.

c) - On peut faire plusieurs mesures en explorant des zones différentes de l'échantillon et faire la moyenne, c'est ce que nous allons étudier au paragraphe 3.

d) - Signalons enfin que l'on peut arriver à une conclusion finale plus optimiste que celle que donnerait l'application brutale de la formule $\varepsilon = 1/\sqrt{BL}$. Cette formule a en effet été démontrée en supposant que l'on n'a aucune information a priori sur la forme du spectre de Wiener, mais nous savons en fait que nous voulons obtenir une courbe suffisamment régulière. Si l'on fait un "lissage" de la courbe la précision est meilleure que celle qu'indique la formule : comme on a des indications a priori sur la forme de la courbe, une quantité d'information moins grande suffit à la déterminer. Les spectres de Wiener présentés dans les autres chapitres ne montrent pas les points expérimentaux mais seulement les courbes "lissées". Cette opération de lissage a été faite à la main, mais il existe des méthodes de lissage de courbes applicables sur ordinateur.

3°) - Cas de plusieurs échantillons

Les calculs faits précédemment supposaient qu'il n'y avait qu'un seul échantillon, mais la méthode est encore applicable s'il y a plusieurs échantillons. Nous n'insisterons pas sur les détails des calculs qui sont compliqués ; nous donnerons seulement quelques résultats.

Les échantillons peuvent être indépendants ou plus ou moins corrélés ; bien entendu, c'est s'ils sont indépendants qu'ils apportent le plus d'information. Pour n échantillons indépendants de longueur L on obtient :

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{nBL}$$

Pour n échantillons indépendants de longueur quelconque :

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{BL_i} = \frac{1}{n} \sum \varepsilon_i^2 \quad \text{où} \quad \varepsilon_i^2 = \frac{1}{BL_i}$$

On peut donc augmenter la précision en faisant plusieurs mesures. En prenant n circonférences pas trop rapprochées (Fig. 61) on divise l'erreur par $\sqrt{n}$.

Pour des échantillons non indépendants intervient leur corrélation et sa transformée de Fourier, la "cross-spectral density". Si nous imaginons un balayage en spirale à vitesse linéaire constante, le calcul donne :

$$\varepsilon^2 = \frac{vd}{2\pi N(b-a)^2} \left(\text{Log } \frac{b}{a}\right) \left[1+2 \frac{s_d(\nu_o) + s_{2d}(\nu_o) + \cdots\cdots}{s(\nu_o)} \right]$$

où d est la distance entre deux spires voisines, a le rayon de la plus petite, b le rayon de la plus grande (Fig. 62) ν_o la fréquence étudiée, $s_{kd}(\nu_o)$ est la transformée de Fourier de la fonction de τ :

$$r_T(\sqrt{k^2d^2 + \tau^2})$$

qui est la corrélation entre deux spires distantes de kd. Si les spires ne sont pas trop serrées, on les considère comme indépendantes et l'on obtient :

$$\varepsilon^2 = \frac{vd \text{ Log } \frac{b}{a}}{2\pi B\, b\, (b-a)^2}$$

4°) - Application à l'analyse harmonique optique.

Il est intéressant de montrer que les méthodes de calcul que nous venons de voir s'appliquant aussi à l'analyse harmonique optique. La Fig. 63 représente le schéma d'un analyseur harmonique optique utilisant la diffraction pour mesurer le spectre de Wiener. Les calculs que nous avons faits pour des fonctions d'une variable peuvent se faire aussi pour des fonctions de deux variables et l'on obtient :

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{BS}}$$

où S est la surface utile de l'échantillon et B est la bande passante dans le plan des fréquences spatiales. Si les deux diaphragmes sont rectangulaires, identiques et de surface s, on démontre que :

$$B = \frac{9}{2} \quad \frac{s}{\lambda^2 F^2}$$

où F est la distance focale de la deuxième lentille. Nous avons finalement :

$$\varepsilon = \frac{F\lambda}{3} \sqrt{\frac{2}{Ss}}$$

Fig. 61

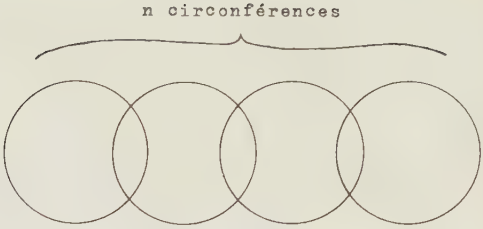
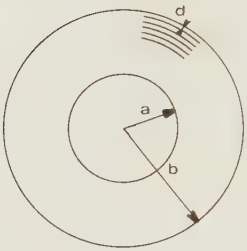


Fig. 62



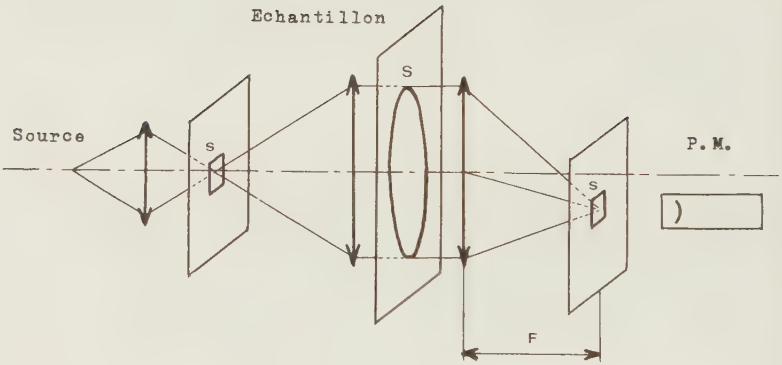


Fig. 63 - Analyse harmonique optique

Les fluctuations d'échantillonnage dans le cas de l'analyse harmonique optique sont bien mises en évidence de la façon suivante :

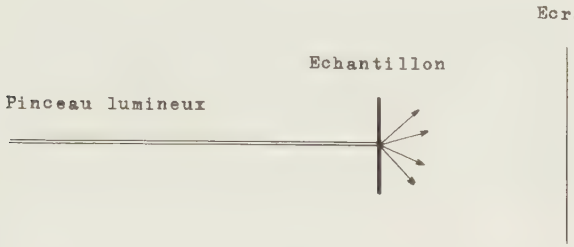


Fig. 64

On éclaire l'échantillon au moyen d'un pinceau lumineux de petit diamètre et l'on place un écran à quelque distance de l'échantillon. Les fluctuations sont bien visibles sur l'écran, et se modifient si l'on déplace l'échantillon par rapport au pinceau lumineux. Elles sont à rapprocher des fluctuations aléatoires d'intensité que l'on observe sur une image reconstituée au moyen d'un hologramme, si la surface utilisée de l'hologramme est petite.

5°) - Retour sur la définition du spectre de Wiener.

Les résultats obtenus sur l'échantillonnage nous permettent d'approfondir la définition du spectre de Wiener par la formule (II - 6), définition qui, nous l'avons vu, soulève quelques difficultés.

L'expression :

$$s_L(\nu) = \frac{1}{L}\left[\int_{-L/2}^{L/2} \Delta f(x)\, e^{-2i\pi\nu x}\, dx\right]^2$$

ne tend pas vers une limite si $L \to \infty$, mais l'expression :

$$\langle s_L , \varphi \rangle$$

où φ est une fonction, tend vers une limite qui est $< s, \varphi >$. Nous voyons maintenant pourquoi: φ représente la réponse en fréquences d'un filtre. Si ce filtre est du type passe-bande, l'erreur d'échantillonnage :

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{BL}}$$

tend vers zéro si $L \to \infty$; il y a convergence pour un filtre passe-bande et à plus forte raison pour un filtre d'un autre type. Bien entendu la fonction φ n'est pas quelconque; on peut par exemple la supposer bornée et continue par morceaux. Il y a bien convergence au sens des distributions :

$$s(\nu) = \lim_{L \to \infty} D \quad \frac{1}{L} \left[\int_{-L/2}^{L/2} \Delta f(x)\, e^{-2i\pi\nu x}\, dx \right]^2$$

J.L. DOOB (164) donne la définition suivante, qui est valable :

$$s(\nu) = \frac{d}{d\nu} \lim_{L \to \infty} \int_{-\infty}^{\nu} \frac{1}{L} \left[\int_{-L/2}^{L/2} \Delta f(x)\, e^{-2i\pi\nu' x}\, dx \right]^2 d\nu'$$

On peut en imaginer d'autres, la suivante par exemple :

$$s(\nu) = \lim_{\substack{L \to \infty \\ B \to 0 \\ BL \to \infty}} \frac{1}{B} \int_{\nu - B/2}^{\nu + B/2} \frac{1}{L} \left[\int_{-L/2}^{L/2} \Delta f(x)\, e^{-2i\pi\nu' x}\, dx \right]^2 d\nu'$$

VIII - PROBLEMES DE FONCTIONS D'APPAREIL

Dans la mesure d'un spectre de Wiener par balayage, la forme de la fonction obtenue dépend de la tache d'exploration. Dans ce chapitre, nous verrons que l'influence de cette tache d'exploration se traduit par des relations intégrales ; l'inversion de ces relations conduit à des problèmes d'équations intégrales dont nous étudierons la résolution. Les calculs sont compliqués et nécessitent l'emploi d'un ordinateur.

A - Formes expérimentales du spectre de Wiener.

Nous conserverons les notations des chapitres précédents : $T(x,y)$ pour la transmission mesurée avec un appareil donné ; $s(\nu,\mu)$ ou $s(\rho)$ pour le spectre de Wiener de $T(x,y)$, $\gamma(\nu)$ pour sa forme intégrale. En première approximation, nous supposerons que l'émulsion est infiniment mince ; nous appellerons s_o ou γ_o le spectre de Wiener de la fonction $T_o(x,y)$ (Voir début du chapitre III) qui correspond à une tache d'exploration très petite.

Soit $D(x,y)$ la fonction égale à 1 à l'intérieur de la tache d'exploration et à 0 à l'extérieur ; l'aire de la tache d'exploration est donnée par la relation :

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} D(x,y)\, dx\, dy$$

L'exploration de l'échantillon peut se représenter de la façon suivante : on déplace devant l'échantillon un écran opaque muni d'une ouverture (Fig. 65). La transmission est le rapport des flux lumineux reçus par le récepteur photoélectrique avec et sans l'échantillon. Sans l'échantillon, le récepteur reçoit un flux :

$$\Phi_o = k \int_{-\infty}^{+\infty} D(x,y)\, dx\, dy = kA$$

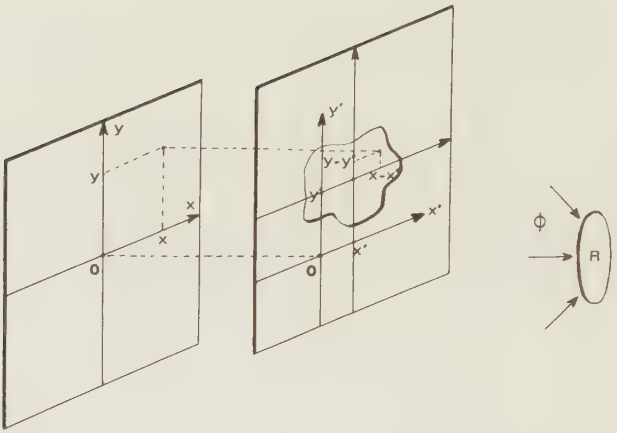


Fig. 65

Avec l'échantillon il reçoit :

$$\Phi = k \iint_{-\infty}^{+\infty} T_o(x,y)\ D(x-x',\ y-y')dxdy = kT_o * \overset{\vee}{D}$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\Phi}{\Phi_o} = \frac{kT_o * \overset{\vee}{D}}{kA} = T_o * \frac{\overset{\vee}{D}}{A}$$

Pratiquement D est toujours une fonction paire et l'on a simplement :

$$\frac{\Phi}{\Phi_o} = T_o * \frac{D}{A}$$

Nous pouvons considérer un échantillon fictif, image plane de l'échantillon dans un système optique dont la tache de diffusion serait :

$$e(x,y) = \frac{\overset{\vee}{D}(x,y)}{A}$$

La transmission de cet échantillon fictif est la fonction $T(x,y)$ et nous avons la relation :

$$T = T_o * e$$

Le spectre de Wiener de $T_o(x,y)$ étant $s_o(\nu,\mu)$ celui de $T(x,y)$ est donc :

$$s(\nu,\mu) = s_o(\nu,\mu) \left[E(\nu,\mu)\right]^2$$

où $E(\nu,\mu)$ est la transformée de Fourier de $e(x,y)$. La forme intégrale du spectre de $T(x,y)$, c'est-à-dire $\phi(\nu)$, est donc donnée par la relation :

$$\phi(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\nu,\mu) \left[E(\nu,\mu)\right]^2 d\mu \qquad \text{(VIII - 1)}$$

1°) - Cas d'une tache rectangulaire

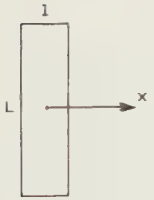


Fig. 66

Soit Ox le sens du déplacement de la tache. Nous appellerons longueur L le côté perpendiculaire au déplacement, et longueur l le côté parallèle, même si l = L ou l > L (Fig. 66)
Nous avons la relation :

$$e(x,y) = \frac{1}{Ll} \quad \text{si} \quad |x| < \frac{l}{2} \quad \text{et} \quad |y| < \frac{L}{2}$$

$$= 0 \text{ dans le cas contraire}$$

ce qui donne, d'après (II - 2) :

$$E(\nu,\mu) = \frac{\sin \pi\nu l}{\pi\nu l} \quad \frac{\sin \pi\mu L}{\pi\mu L}$$

En remplaçant dans (VIII - 1) :

$$\phi(\nu) = \left(\frac{\sin \pi\nu l}{\pi\nu l}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi\mu L}{\pi\mu L}\right)^2 s_o\left(\sqrt{\nu^2+\mu^2}\right) d\mu$$

(VIII - 2)

Cette relation donne le spectre mesuré $\phi(\nu)$ en fonction de la méridienne $s_\delta(\rho)$ correspondant à une tache très petite. En faisant le changement de variable $\rho = \sqrt{\nu^2 + \mu^2}$ nous obtenons une autre forme de la même relation :

$$\phi(\nu) = \left(\frac{\sin \pi\nu l}{\pi\nu l}\right)^2 \int_\nu^{+\infty} \frac{2 \sin^2 \pi \sqrt{\rho^2 - \nu^2}\, L}{\pi^2 (\rho^2 - \nu^2)^{3/2}\, L^2} \; s_\delta(\rho)\, d\rho$$

Ces deux formes nous seront également utiles.

2°) - <u>Cas limites : tache ponctuelle et fente infiniment longue.</u>

a) - Si la tache est très petite, nous retrouvons bien entendu la fonction $\phi_\delta(\nu)$: L et l sont très petits donc :

$$\frac{\sin \pi\nu l}{\pi\nu l} \simeq 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sin \pi\mu L}{\pi\mu L} \simeq 1$$

Il reste :

$$\phi(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_\delta\left(\sqrt{\nu^2 + \mu^2}\right) d\mu = \phi_\delta(\nu)$$

b) - Si la tache est très longue et très étroite, la formule se simplifie également :

l est très petit donc $\frac{\sin \pi\nu l}{\pi\nu l} \simeq 1$

L est très grand, donc la fonction $\frac{\sin \pi\mu L}{\pi\mu L}$ peut être assimilée à une impulsion de Dirac. D'après (II - 5) nous avons :

$$\frac{\sin^2 \pi\mu L}{\pi^2 \mu^2 L^2} = \frac{1}{L} \times \frac{\sin^2 \pi\mu L}{\pi^2 \mu^2 L} \simeq \frac{1}{L} \quad \delta(\mu)$$

ce qui nous donne :

$$\phi(\nu) = \frac{1}{L} \; s_\delta(\nu)$$

En multipliant le spectre mesuré par la longueur de la fente, on obtient la méridienne $s(\rho)$. L'autocorrélation correspondant au spectre $\phi(\nu)$ mesuré dans ces conditions est la fonction $c(\tau)$ que nous avons vue au chapitre III. Nous avons les relations :

$$c(\tau) = \frac{1}{L} \cdot 2 \int_0^{+\infty} s_o(\nu) \cos 2\pi\nu\tau \, d\nu$$

$$c(\tau) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau, \tau') \, d\tau'$$

3°) - Cas d'une tache circulaire

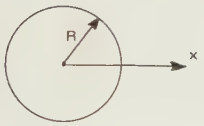


Fig 67

Nous avons maintenant (Fig. 67) :

$$e(x,y) = e(r) = \frac{1}{\pi R^2} \quad \text{si} \quad r < R$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad r > R$$

où R est le rayon de la tache. D'après (II - 3) :

$$E(\rho) = 2\pi \frac{1}{\pi R^2} R^2 \frac{J_1(2\pi\rho R)}{2\pi\rho R} = \frac{J_1(2\pi\rho R)}{\pi\rho R}$$

et la relation (VIII - 1) devient :

$$\phi(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{J_1(2\pi \sqrt{\nu^2+\mu^2} \, R)}{\pi \sqrt{\nu^2+\mu^2} \, R} \right]^2 s_o\left(\sqrt{\nu^2+\mu^2}\right) d\mu$$

ou

$$\phi(\nu) = \int_{\nu}^{+\infty} \left[\frac{J_1(2\pi\rho R)}{\pi\rho R} \right]^2 \frac{2\rho}{\sqrt{\rho^2-\nu^2}} \, s_o(\rho) \, d\rho$$

L'une ou l'autre de ces deux dernières relations donne le spectre mesuré $\phi(\nu)$ en fonction de la méridienne $s_o(\rho)$. Pour une très petite tache, on retrouve $\phi_o(\nu)$ comme avec une tache rectangulaire :

R est petit donc $\frac{J_1(2\pi\rho R)}{\pi\rho R} \simeq 1$ et il reste :

$$\phi(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} s\left(\sqrt{\nu^2+\mu^2}\right) d\mu = \phi_0(\nu)$$

4°) - Décomposition en gaussiennes

Considérons le cas d'une tache rectangulaire et posons :

$$\psi(\nu) = \frac{\phi(\nu)}{\left(\frac{\sin \pi\nu l}{\pi\nu l}\right)^2}$$

La formule (VIII-2) devient :

$$\psi(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mu)\, s\left(\sqrt{\nu^2+\mu^2}\right) d\mu \qquad (VIII - 3)$$

où $P(\mu)$ est une fonction de pondération de la variable μ, égale à $\left(\frac{\sin \pi\mu L}{\pi\mu L}\right)^2$. La transformation qui donne $\psi(\nu)$ à partir de $s_0(\rho)$ est une généralisation de la transformation d'Abel, qui s'en distingue par la présence de la fonction $P(\mu)$.

Supposons que $s_0(\rho)$ soit une fonction de Gauss centrée :

$$s_0(\rho) = a\, e^{-\rho^2/b^2}$$

$$\psi(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mu)\, a\, e^{-\frac{\nu^2+\mu^2}{b^2}} d\mu = a\, e^{-\nu^2/b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mu) e^{-\frac{\mu^2}{b^2}} d\mu$$

Si l'on pose :

$$c = a \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mu)\, e^{-\mu^2/b^2} d\mu$$

on obtient :

$$\psi(\nu) = c\, e^{-\nu^2/b^2}$$

Si $s(\rho)$ est une fonction gaussienne centrée, $\psi(\nu)$ en est une également, de même écart-type. Les fonctions de Gauss centrées sont donc des fonctions propres de la transformation d'Abel généralisée que nous venons de définir. Cette propriété est très importante : en effet les spectres de Wiener expérimentaux ont la forme de courbes en cloche rappelant celle d'une courbe de Gauss et, comme nous le verrons plus loin en détail, un spectre de Wiener peut être représenté avec une bonne précision par une somme d'un petit nombre de fonctions gaussiennes. Les gaussiennes très étalées pour lesquelles b est grand correspondent aux composantes du spectre dues aux grains eux-mêmes, les gaussiennes moyennes correspondent aux agglomérations de grains et les gaussiennes étroites pour lesquelles b est petit à des facteurs tels que le moutonnement des écrans radiographiques. Il est même plus intéressant de parler de composantes gaussiennes "étalées" ou "étroites" que de parler de hautes et de basses fréquences spatiales dans le spectre de Wiener. Malheureusement, il n'est pas possible de déterminer une fonction continue F(b) telle que :

$$s(\rho) = \int_0^{+\infty} F(b)\, e^{-\rho^2/b^2}\, db \qquad \text{(VIII - 4)}$$

car F(b) est une distribution. L'équation (VIII - 4) est un exemple d'équation intégrale de Fredholm de première espèce (V. Chapitre II) dont la solution est une distribution et non une fonction.

Si nous appelons K la transformation :

$$\psi = K\, s_o$$

nous avons

$$Ks = \lambda s_o$$

si $s_o(\rho) = a\, e^{-\rho^2/b^2}$ et $\lambda = \frac{c}{a} = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mu)\, e^{-\mu^2/b^2}\, d\mu$

λ est la valeur propre correspondant à la fonction propre $a\, e^{-\rho^2/b^2}$. Si la fonction $s_o(\rho)$ est une somme de fonctions gaussiennes :

$$s_o(\rho) = a_1\, e^{-\rho^2/b_1^2} + a_2\, e^{-\rho^2/b_2^2} + \cdots\cdots$$

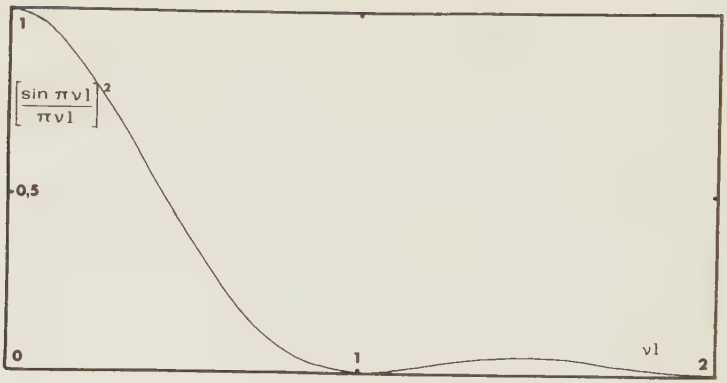

1
$\left[\frac{\sin \pi v l}{\pi v l}\right]^2$
0,5
0
1
vl
2

Fig. 68

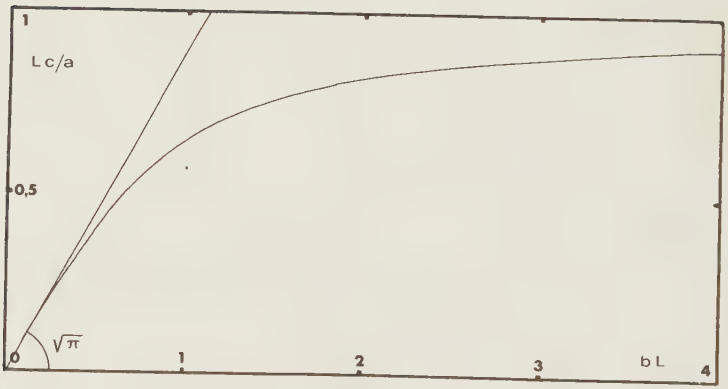

1
Lc/a
0,5
0
$\sqrt{\pi}$
1
2
3
bL
4

Fig. 69

on a alors :

$$\psi(\nu) = \lambda(b_1)\, a_1\, e^{-\nu^2/b_1^2} + \lambda(b_2)\, a_2\, e^{-\nu^2/b_2^2} + \ldots\ldots$$

La valeur propre $\lambda = c/a$ est une certaine fonction de b et de L, donnée par :

$$\frac{c}{a} = \lambda(b,L) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi\mu L}{\pi\mu L}\right)^2 e^{-\mu^2/b^2}\, d\mu$$

Pour étudier plus commodément la fonction $\lambda(b,L)$, on peut la ramener à une fonction d'une seule variable en utilisant une équation réduite : si l'on pose $y = bL$ et $z = \mu/b$, l'équation devient :

$$L\frac{c}{a} = y\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi yz}{\pi yz}\right)^2 e^{-z^2}\, dz = f(y) = f(bL) \qquad \text{(VIII - 5)}$$

La quantité L c/a est donc fonction du produit bL.

Si bL est petit : $L\frac{c}{a} \simeq bL\sqrt{\pi}$

si bL est grand : $L\frac{c}{a} \simeq 1$

La variation de la fonction est représentée par la Fig. 69 . Pour la calculer nous n'avons pas trouvé de primitive, et il a fallu faire pour chaque point une intégration numérique par la méthode des trapèzes. Le calcul a été fait au moyen de l'ordinateur I.B.M. 1401 (V. Appendice).

Dans le cas d'une tache circulaire, les fonctions gaussiennes interviennent également : on applique une transformation d'Abel à la fonction

$$\Sigma(\rho) = \left[\frac{J_1(2\pi\rho R)}{\pi\rho R}\right]^2 \qquad s_o(\rho)$$

soit

$$\phi(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma\left(\sqrt{\nu^2+\mu^2}\right) d\mu$$

Si $s(\rho) = a\, e^{-\rho^2/b^2}$, on démontre facilement que :

$$\Sigma(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} a\, e^{-\frac{\nu^2+\mu^2}{b^2}}\, d\mu = ab\sqrt{\pi}\; e^{-\rho^2/b^2}$$

Donc si :

$$\Sigma(\rho) = a_1\, e^{-\rho^2/b_1^2} + a_2\, e^{-\rho^2/b_2^2} + \ldots\ldots$$

on a : $\phi(\nu) = a_1 b_1 \sqrt{\pi}\; e^{-\nu^2/b_1^2} + a_2 b_2 \sqrt{\pi}\; e^{-\nu^2/b_2^2} + \ldots\ldots$

5°) - Résultats pratiques des formules

Prenons d'abord le cas d'une tache rectangulaire. Nous avons vu la relation :

$$\psi = K s_o$$

où K est la transformation d'Abel généralisée que nous avons vue plus haut (VIII - 3), et nous pouvons écrire également :

$$\phi = H \psi$$

où H est une transformation très simple qui consiste seulement à faire le produit de la fonction $\psi(\nu)$ par $(\frac{\sin \pi \nu l}{\pi \nu l})^2$. En tout nous avons :

$$\phi = H K s_o$$

H traduit l'effet de la largeur de la tache, K l'effet de la longueur. L'effet de la largeur est un filtrage des fréquences élevées. La Fig. 68 représente la variation de $(\frac{\sin \pi \nu l}{\pi \nu l})^2$ en fonction de νl. Le premier zéro est pour $\nu l = 1$ et ensuite la fonction reste petite : avec une tache de largeur l, on ne peut étudier que des fréquences inférieures à $1/l$.

L'effet de la longueur de la tache est plus compliqué, mais la Fig. 70 en donne une idée. La courbe de la Fig. 69 représente la variation de c/a en fonction de b pour L = cte. Si nous supposons un spectre de Wiener $s_\delta(\rho)$ constitué de trois composantes gaussiennes, une très étroite, une moyenne et une très étalée, le résultat est le suivant :

- avec une tache très longue, on a sensiblement $Lc/a = 1$ pour les trois composantes. Donc $L\,\phi(\nu) \simeq s_\delta(\nu)$.

- avec une tache moins longue, on a encore Lc/a = 1 pour les composantes moyenne et très étalée ; pour la composante étroite Lc/a est plus petit et cette composante apparaît moins.

- avec une tache assez courte, les composantes étroite et moyenne sont toutes deux diminuées par rapport à la composante étalée.

- avec une tache très courte, toutes les composantes sont diminuées, mais d'autant plus en valeur relative qu'elles sont plus étroites.

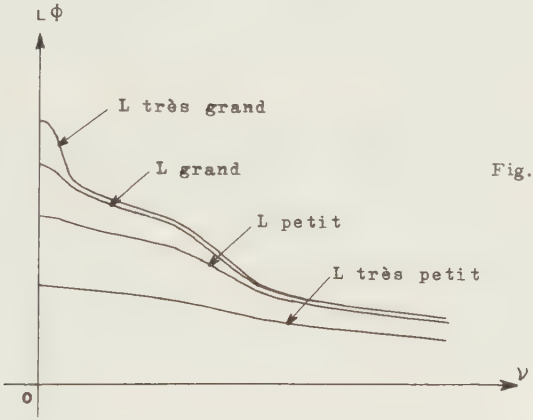


Fig. 71

En conclusion, on a d'autant plus d'information sur les particularités du spectre dans les basses fréquences que la tache d'exploration est plus allongée. C'est la fonction $\delta(\rho)$ (tache infiniment longue) qui en donne le plus, et c'est la fonction $\delta(\nu)$ (tache ponctuelle) qui en donne le moins.

Ceci est particulièrement important dans l'étude du "moutonnement" dû aux écrans renforçateurs utilisés en radiographie, comme le montre la Fig.71 qui représente un spectre de Wiener mesuré avec trois taches différentes. L'échantillon est le même que celui étudié au chapitre V (Fig.26).

Avec une tache circulaire, le rayon de la tache influe à la fois sur les hautes et les basses fréquences ; le résultat est peu différent de celui qu'on obtient avec une tache carrée de même surface.

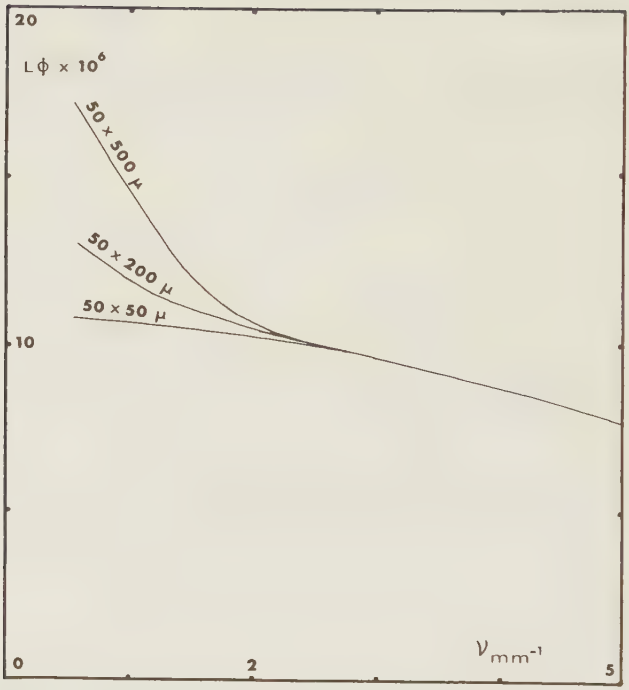


Fig. 71 - Influence de la longueur de la tache d'exploration

B - Inversion des formules

1°) - Considérations sur les équations intégrales de première espèce.

Nous avons vu diverses formules qui donnent le spectre mesuré $\phi(\nu)$ en fonction de la méridienne $s_0(\rho)$. Si on cherche à les inverser, c'est-à-dire à déterminer $s_0(\rho)$ connaissant $\phi(\nu)$, elles se présentent comme des équations intégrales de Volterra de première espèce. Or les différents traités existants sur les équations intégrales (165) (166) (167) (168) (169) (219) montrent que, si les équations de deuxième espèce ont été abondamment étudiées, les équations de première espèce ont été presque complètement passées sous silence, et ceci en raison des difficultés d'ordre théorique auxquelles elles donnent lieu. Citons à ce sujet R. COURANT et D. HILBERT (215) :

"La difficulté particulière de la théorie des équations intégrales de première espèce réside dans le fait suivant : pour un noyau continu K(x,y), l'équation transforme l'ensemble de toutes les fonctions f(y) continues par morceaux en un ensemble plus restreint, puisque toutes les fonctions g(x) obtenues de cette façon sont certainement continues. Si K(x,y) est dérivable, toute fonction continue par morceaux, et en fait toute fonction intégrables, est transformée en une fonction dérivable. En général, l'équation intégrale où g(x) est continue ne peut pas être résolue par une fonction f continue. Pour des classes plus générales de fonctions g(x), on peut s'attendre à ce que l'équation ne puisse être résolue que si K(x,y) présente quelque irrégularité".

a) - Emploi de la théorie des distributions.

Il semble que, si la théorie ordinaire des fonctions suffit généralement pour l'étude des équations de seconde espèce, pour les équations de première espèce, il soit nécessaire de faire intervenir la théorie des distributions. En effet, une transformation intégrale de la forme (II - 8) :

$$g(x) = \int_a^b K(x,y)\, f(y)\, dy$$

peut s'écrire :

$$g(x) = \langle K_x(y) , f(y) \rangle$$

où K_x est une distribution dépendant d'un paramètre x. Cette dernière forme permet même de définir un ensemble plus vaste de transformations, car K_x peut maintenant être une distribution non représentable par une fonction.

On peut chercher une formule d'inversion de la forme :

$$< K'_y(x) , g(x) > = f(y) \qquad \text{(VIII - 6)}$$

où K' est une distribution qui n'est pas nécessairement représentable par une fonction, même si K est représentable par une fonction. C'est précisément le cas de l'inversion de l'intégrale d'Abel : la formule (II - 9) :

$$f(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{+\infty} \frac{\frac{dg(x)}{dx}}{\sqrt{x^2 - r^2}} \, dx$$

définit bien une distribution $K'_r(x)$ telle que

$$f(r) = < K'_r(x), g(x) >$$

et il n'existe pas de fonction K'(r,x) telle que :

$$\int_{a'}^{b'} K'(r,x) \, g(x) = f(r)$$

Ceci permet de justifier certains procédés de calcul employés par divers auteurs pour résoudre des problèmes de "déconvolution". Une équation de convolution du type :

$$g(x) = (f * D)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \, D(x-y) \, dy$$

est une équation de Fredholm de première espèce.
On peut l'écrire :

$$g(x) = < D(x-y) , f(y) >$$

et chercher une formule d'inversion

$$f(y) = < D'(y-x) , g(x) > = g * D'$$

où D' est une distribution. Une fonction φ donnera approximativement le résultat :

$$f \simeq g * \varphi$$

si φ est voisine de D' au sens des distributions.

Ce procédé a été employé avec succès dans des études de géophysique et de spectrographie (216) (217) (218). L'emploi de la théorie des distributions permet donc de le justifier.

La formule d'inversion (VIII-6) peut quelquefois s'exprimer par une relation algébrique ne faisant intervenir que des fonctions connues, comme nous en avons un exemple avec l'intégrale d'Abel, mais ce n'est pas nécessairement le cas.

b) - Analogies avec le calcul matriciel

Les transformations intégrales et les équations de première espèce qui leur correspondent présentent d'importantes analogies avec le calcul matriciel, analogies qui nous seront utiles pour chercher des solutions numériques applicables pratiquement. Par analogie avec la relation :

$$X = A\,Y$$

où X et Y sont des vecteurs et A une matrice, la relation

$$g(x) = \int_a^b K(x,y)\, f(y)\, dy = \langle K_x(y)\ ,\ f(y) \rangle$$

peut s'écrire :

$$g = Kf$$

et l'on peut définir différentes opérations analogues aux opérations sur les matrices :

α) - produit

si $g = K_1 f$ et $h = K_2 g$, on peut écrire :

$$h = K_2\, K_1 f = Kf \quad \text{où} \quad K = K_2 K_1$$

$$g(x) = \langle {K_1}_x(y)\ ,\ f(y) \rangle$$

$$h(z) = \langle {K_2}_z(x)\ ,\ g(x) \rangle$$

$$K_z(y) = \langle {K_2}_z(x),\ {K_1}_x(y) \rangle$$

β) - transposition

si K(x,y) est une fonction de deux variables et si l'on intègre par rapport à la variable y, on écrit $K_x(y)$; si l'on intègre par rapport à x on écrit $K_y^T(x)$. Ceci équivaut à la transposition des matrices et l'on retrouve les mêmes propriétés, par exemple :

$$(K_2 K_1)^T = K_1^T K_2^T$$

Cette opération de transposition, classique en théorie des matrices, a été signalée pour les transformations intégrales par A. LICHNEROWITZ (219).

γ) - Transformation unité

A la matrice unité qui transforme un vecteur en lui-même, correspond la "transformation unité" $\delta_x(y)$

$$< \delta_x(y) , f(y) > = f(x)$$

δ) - Transformations diagonales

Avec une matrice diagonale, chaque élément de la diagonale multiplie une composante du vecteur. Une transformation diagonale exprime le produit de deux fonctions :

$$< h(x) \ \delta_x(y) , f(y) > = h(x) \ f(x)$$

C'est le cas de la transformation H qui exprime l'effet de la largeur d'une tache rectangulaire.

ε) - Valeurs propres et fonctions propres

A l'équation :

$$A X = \lambda X$$

satisfaite pour un ensemble de valeurs propres λ et de vecteurs propres, correspond l'équation intégrale homogène de deuxième espèce :

$$K \cdot f = \lambda f$$

satisfaite par un ensemble de valeurs propres et de fonctions propres.

ζ) - Inversion

Si une transformation inverse

$$f(y) = < K'_y(x) , g(x) >$$

existe, on peut écrire : $K' = K^{-1}$.

Ces différentes considérations pourraient servir de point de départ à une théorie approfondie des équations intégrales de première espèce. Nous n'aborderons pas ici dans sa généralité le problème ardu de l'existence, de l'unicité, de la nature et du calcul des solutions à ces équations, ni la discussion des cas où les différents formalismes que nous venons de voir sont applicables ou non. Ceux-ci cependant, bien que nous ne les ayons pas justifiés en toute rigueur du point de vue théorique, vont nous être utiles pour chercher des solutions pratiques aux équations intégrales rencontrées dans l'étude de la granularité.

2°) - Méthode matricielle

Nous étudierons essentiellement le cas d'une tache rectangulaire. Rappelons l'équation intégrale à résoudre :

$$\psi(\nu) = \int_{\nu}^{+\infty} \frac{2 \sin^2 \pi\sqrt{\rho^2 - \nu^2}\, L}{\pi^2 (\rho^2 - \nu^2)^{3/2} L^2} \, s_o(\rho) \, d\rho$$

ou :
$$\psi(\nu) = \int_{\nu}^{+\infty} K(\nu,\rho)\, s(\rho)\, d\rho$$

où $s(\rho)$ est la fonction inconnue.

On pourrait chercher une formule d'inversion de la forme :

$$s_o(\rho) = \int_{\rho}^{+\infty} P'(\nu) \, \frac{\frac{d\phi(\nu)}{d\nu}}{\sqrt{\nu^2 - \rho^2}} \, d\nu$$

où $P'(\nu)$ est une fonction liée à $P(\nu)$, mais ce type de formule se prête assez mal au calcul numérique, de même que la formule directe d'ailleurs. Les deux méthodes que nous allons voir reposent sur des principes différents ; elles sont étudiées essentiellement en vue du calcul numérique, et elles permettent d'effectuer à peu près de la même manière les transformations directe et inverse.

Le point de départ de la méthode matricielle est l'analogie entre les transformations intégrales et matricielles que nous venons de voir. Les fonctions $s(\rho)$, $K(\nu,\rho)$ et $\psi(\nu)$ étant continues, on peut songer à remplacer la transformation intégrale par une transformation matricielle donnant n points de la fonction ψ à partir de n points de la fonction s_o :

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{n} K_i^j \; s_j \quad (i = 1 \ldots n)$$

Ceci revient à effectuer l'intégration, pour n valeurs de ν, par la méthode des trapèzes, en prenant n valeurs de $s(\rho)$ pour chaque intégration. Les coefficients K_i^j sont déterminés comme suit :

$$\psi(\nu_i) = \sum_j \int_{B_j}^{B_{j+1}} K(\nu_i, \rho)\, s(\rho)\, d\rho$$

$$\simeq \sum_j \int_{B_j}^{B_{j+1}} K(\nu_i, \rho)\, s(\rho_j)\, d\rho$$

$$= \sum_j \left[\int_{B_j}^{B_{j+1}} K(\nu_i, \rho)\, d\rho \right] s(\rho_j)$$

donc :

$$K_i^j = \int_{B_j}^{B_{j+1}} K(\nu_i, \rho)\, d\rho$$

Les bornes d'intégration B_1 , B_2 .... B_{n+1} doivent être choisies de façon convenable. L'expérience montre qu'on obtient de bons résultats en prenant les ρ_j et ν_i en progression géométrique ; nous avons choisi : $n = 10$, $\nu_1 = \rho_1 = 0{,}5\ mm^{-1}$ et la raison de la progression égale à $\sqrt{2}$:

$$\rho_j = \rho_1 (\sqrt{2})^{j-1}$$

$$\nu_i = \nu_1 (\sqrt{2})^{i-1}$$

$$\nu_1 = \rho_1 \text{ donc } \nu_i = \rho_i$$

et nous avons choisi les B_j de telle façon que :

$$\rho_j = \frac{B_j + B_{j+1}}{2} \qquad \text{(Fig. 72)}$$

ce qui donne :

$$B_j = \rho_j \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \rho_1 \frac{2(\sqrt{2})^j}{1+\sqrt{2}}$$

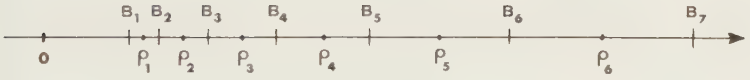


Fig. 72

Plus précisément, l'intégration est faite seulement à partir de ν et pour une valeur donnée de i nous avons :

si $j < i$: $K_i^j = 0$

si $j > i$:

$$K_i^j = \int_{B_j}^{B_{j+1}} \frac{\sin \pi\sqrt{\rho^2 - \nu_i^2}\ L}{\pi\sqrt{\rho^2 - \nu_i^2}\ L} \frac{2\rho}{\sqrt{\rho^2 - \nu_i^2}}\, d\rho$$

(VIII - 7)

avec $B_j = \rho_i$ si $j = i$

et $B_j = \rho_j \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ si $j > i$

Le résultat est une matrice du type "triangulaire" c'est-à-dire que tous les éléments d'un côté de la diagonale sont nuls ; cela est dû au fait que la transformation est du type de Volterra. Nous avons employé l'ordinateur pour le calcul de ces matrices. Pour chaque matrice il y a 55 éléments non nuls à calculer ; or l'intégration numérique est une opération très longue à effectuer, même sur ordinateur : heureusement nous avons pu trouver une primitive permettant de calculer rapidement les intégrales. Pour cela un double changement de variable a été fait :

En posant $\mu = \sqrt{\rho^2 - \nu_i^2}$, la formule (VIII - 7) devient :

$$K_i^j = 2 \int_{\sqrt{B_j^2 - \nu_i^2}}^{\sqrt{B_{j+1}^2 - \nu_i^2}} \left(\frac{\sin \pi\mu L}{\pi\mu L}\right)^2 d\mu$$

et en posant $x = \pi\mu L$:

$$K_i^j = \frac{2}{\pi L} \int_{\pi L\sqrt{B_j^2 - \nu_i^2}}^{\pi L\sqrt{B_{j+1}^2 - \nu_i^2}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

On démontre facilement, au moyen d'une intégration par parties, que la fonction :

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

a pour primitive

$$F(x) = Si(2x) - \frac{\sin 2x}{x}$$

où le symbole Si représente la fonction appelée "sinus intégral" :

$$Si(z) = \int_0^z \frac{\sin y}{y}\, dy = z - \frac{z^3}{3.3!} + \frac{z^5}{5.5!} + \frac{z^7}{7.7!} \cdots$$

On a finalement :

$$K_i^j = \frac{2}{\pi L} \quad F(\pi L \sqrt{B_j^2 - \nu_i^2}) - F(\nu L \sqrt{B_{j+1}^2 - \nu_i^2})$$

où $F(x) = Si(2x) - \frac{\sin 2x}{x}$

C'est cette dernière formule qui a été employée pour le calcul sur ordinateur. (V. Appendice pour les exemples de résultats).

Nous avons donc étudié la transformation K, qui exprime l'effet de la largeur de la tache. La deuxième transformation H est un exemple de ce que nous avons appelé "transformation diagonale". Elle se traduit par une matrice diagonale de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\sin \pi\nu_1 l}{\pi\nu_1 l}\right)^2 & 0 & 0 \cdots\cdots \\ 0 & \left(\frac{\sin \pi\nu_2 l}{\pi\nu_2 l}\right)^2 & 0 \cdots\cdots \\ 0 & 0 & \left(\frac{\sin \pi\nu_3 l}{\pi\nu_3 l}\right)^2 \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

On peut effectuer le produit des matrices H et K.

Nous avons donc obtenu une approximation matricielle des transformations K et HK. On sait inverser une matrice, et c'est encore plus facile si la matrice est triangulaire : les matrices inverses K^{-1} et $(HK)^{-1}$ nous permettent de calculer s :

$$s_o = K^{-1}\psi = (HK)^{-1}\phi \qquad \text{(VIII - 8)}$$

L'équation intégrale a été ramenée à un système de n équations à n inconnues que l'on sait résoudre.

3°) - Emploi des fonctions gaussiennes

Le principe est le suivant : considérons l'équation intégrale homogène de seconde espèce :

$$K\varphi = \lambda\varphi$$

dont les solutions sont les valeurs propres λ et fonctions propres φ. Si la fonction ψ peut être exprimée par une somme de fonctions propres :

$$\psi(\nu) = c_1 \varphi_1(\nu) + c_2 \varphi_2(\nu) \ldots\ldots$$

alors la solution $s_o(\rho)$ est donnée par :

$$s_o(\rho) = \frac{c_1}{\lambda_1} \varphi_1(\nu) + \frac{c_2}{\lambda_2} \varphi_2(\nu) \ldots\ldots$$

R. COURANT et D. HILBERT (215) suggèrent une solution rigoureuse au moyen d'une série convergente ; nous nous contenterons d'une solution approximative se limitant à un petit nombre de termes. Une généralisation de cette méthode, dont nous verrons une application dans le calcul de l'autocorrélation, est la suivante : si l'on connaît un certain nombre de fonctions $s_1(\rho)$, $s_2(\rho)$ .... pour lesquelles on connait les transformées $\psi_1(\nu)$, $\psi_2(\nu)$, et si l'on peut écrire :

$$\psi(\nu) = c_1 \psi_1(\nu) + c_2 \psi_2(\nu) + \ldots\ldots$$

le solution est donnée par :

$$s_o(\rho) = c_1 s_1(\rho) + c_2 s_2(\rho) + \ldots\ldots$$

Ce type de méthode peut servir aussi bien à effectuer les transformation directes ou inverses. Dans les deux cas son avantage est le suivant : le calcul est rapide car il nécessite relativement peu d'opérations.

Nous avons vu que les fonctions gaussiennes sont fonctions propres. Il suffit donc de décomposer $\psi(\nu)$ en somme de fonctions gaussiennes. Dans les basses fréquences toutes les composantes interviennent ; dans les hautes fréquences les composantes étroites sont négligeables et seules les composantes étalées interviennent : on commence donc par déterminer la composante la plus étalée $c_1 e^{-\nu^2/b_1^2}$ au moyen des derniers points de la courbe. On fait ensuite la différence :

$$\psi(\nu) - c_1 e^{-\nu^2/b_1^2}$$

et on calcule la deuxième composante $c_2 e^{-\nu^2/b_2^2}$, à partir de points d'abscisse un peu moins grande ; on fait la différence

$$\psi(\nu) - c_1 e^{-\nu^2/b_1^2} - c_2 e^{-\nu^2/b_2^2}$$

et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les points de la courbe soient convenablement représentés. La Fig. 73 montre comment se déroule l'opération.

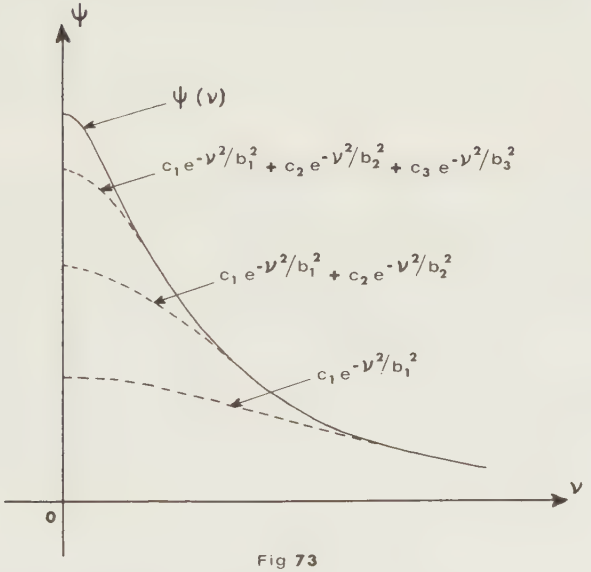


Fig 73

Cette méthode peut paraître simpliste mais donne en fait une bonne précision. On commence par diviser $\phi(\nu)$ par $\left(\frac{\sin \pi\nu l}{\pi\nu l}\right)^2$ pour obtenir $\psi(\nu)$, on décompose ensuite

$\psi(\nu)$ en somme de gaussiennes ; $\psi(\nu)$ est alors représentée par les nombres c_1, b_1, c_2, b_2 ..... La fonction L c/a = f(bL) que nous avons vue précédemment nous permet de calculer rapidement les a_1, a_2... et nous avons donc la méridienne :

$$s_o(\rho) = a_1 e^{-\rho^2/b_1^2} + a_2 e^{-\rho^2/b_2^2} + \ldots\ldots\ldots$$

La forme intégrale est donnée par :

$$\varphi(\nu) = a_1 b_1 \sqrt{\pi}\ e^{-\nu^2/b_1^2} + a_2 b_2 \sqrt{\pi}\ e^{-\nu^2/b_2^2} + \ldots$$

Nous pouvons aussi obtenir l'autocorrélation; le calcul de l'autocorrélation est un exemple de la généralisation de la méthode dont nous avons parlé plus haut : en vertu de la relation (II - 4), à la méridienne :

$$s_o(\rho) = a\, e^{-\rho^2/b^2}$$

correspond l'autocorrélation

$$r(\tau) = \pi a b^2\ e^{-\pi^2 b^2 \tau^2}$$

L'autocorrélation est donnée par :

$$r(\tau) = \pi a_1 b_1^2\ e^{-\pi^2 b_1^2 \tau^2} + \pi a_2 b_2^2\ e^{-\pi^2 b_2^2 \tau^2} + \ldots\ldots$$

Dans le cas d'une tache circulaire, on la suppose équivalente à une tache carrée de même surface.

4°) - Vérification expérimentale

Les programmes donnés en Appendice permettent l'application pratique au moyen de l'ordinateur des deux méthodes que nous venons de voir. Les formules étant démontrées pour une couche d'émulsion infiniment mince, nous avons préparé un échantillon spécial afin d'en avoir une vérification précise. Nous avons pris un échantillon d'émulsion radiographique et nous l'avons exposé avec un écran renforçateur en utilisant un kilovoltage élevé (260 KV) afin d'avoir un

moutonnement important dans les basses fréquences ; nous avons fait la copie de cet échantillon sur une plaque "Maximum Resolution" ayant une couche d'émulsion de quelques microns seulement d'épaisseur. A partir d'un spectre de Wiener mesuré nous avons inversé la transformation pour obtenir la méridienne, puis appliqué la transformation directe pour obtenir le spectre de Wiener qui serait mesuré avec une autre tache :

$$s_o = H_1 K_1 \phi_1$$

$$s_o = H_2 K_2 \phi_2$$

$$\phi_2 = (H_2 K_2)^{-1} (H_1 K_1) \phi_1$$

et nous avons comparé avec l'expérience le spectre ainsi calculé (Fig. 74 - 75).

Les deux méthodes donnent sensiblement le même résultat. Comme elles sont complètement différentes, on peut en déduire que le calcul est exact. L'écart le plus grand entre les deux méthodes a lieu pour le dernier point ; il provient du fait que la dernière borne B_{n+1} ne rend compte qu'imparfaitement de l'intégration jusqu'à $+\infty$.

Un autre problème est la vérification de la formule (VIII - 2) . L'étude exposée dans ce chapitre concerne essentiellement la recherche de méthodes d'inversion de cette formule, plutôt que la vérification quantitative de sa validité. La vérification que montrent les Fig.74 et 75 , faite avec une émulsion mince et dans un domaine de fréquences spatiales assez basses, donne un bon résultat. Mais avec des émulsions ordinaires plus épaisses et dans un domaine de fréquences plus étendu, des écarts apparaissent. La formule (VIII - 2) est démontrée en supposant d'une part l'émulsion mince, et d'autre part l'éclairage incohérent ; une étude complète ferait intervenir les ouvertures numériques des systèmes d'éclairage et de mesure, donc serait la synthèse de ce chapitre et du chapitre sur l'effet Callier, et elle tiendrait compte de l'épaisseur de l'émulsion.

Il est à prévoir que des écarts doivent apparaître dans les fréquences spatiales élevées. Des écarts apparaissent également dans les basses fréquences ; l'effet a l'allure générale suivante : les spectres obtenus avec des taches de longueur variable (Fig. 71) sont plus différents que ne le prévoit la formule (VIII - 2). Cet effet semble dû au fait qu'au moutonnement, ou relèvement du spectre dans les basses fréquences, correspondent des corrélations à distance assez grande, non seulement dans le plan de l'émulsion, mais aussi dans le sens de son épaisseur.

On peut prévoir que les transformations obtenues en tenant compte de tous ces facteurs s'exprimeraient encore par des relations intégrales de la même forme que celles que nous venons de voir, et que les mêmes méthodes

d'inversion seraient applicables. La méthode matricielle fait intervenir une matrice dont les éléments K_i^j peuvent théoriquement être déterminés expérimentalement à partir d'un grand nombre de mesures portant sur des spectres de formes variées. La deuxième méthode doit pouvoir s'appliquer, soit avec de nouvelles fonctions propres, soit en maintenant les fonctions gaussiennes, ce qui serait sans doute une approximation valable ; dans ce cernier cas la relation :

$$L \frac{c}{a} = f(bL)$$

serait remplacée par une relation plus générale :

$$L \frac{c}{a} = f(b,L)$$

dépendant de l'épaisseur de l'émulsion et des ouvertures numériques.

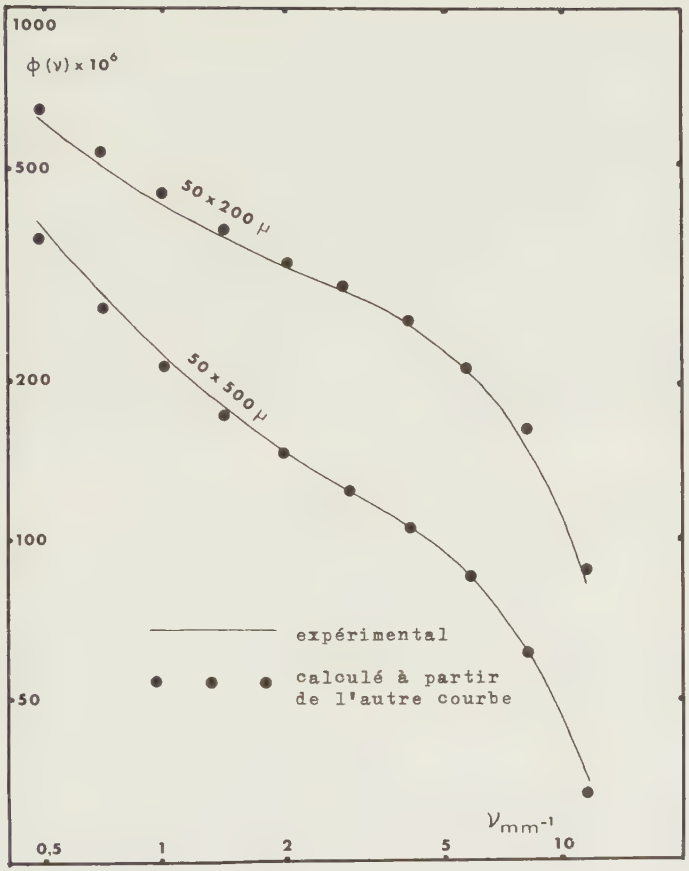


Fig. 74 - Vérification expérimentale
de la première méthode

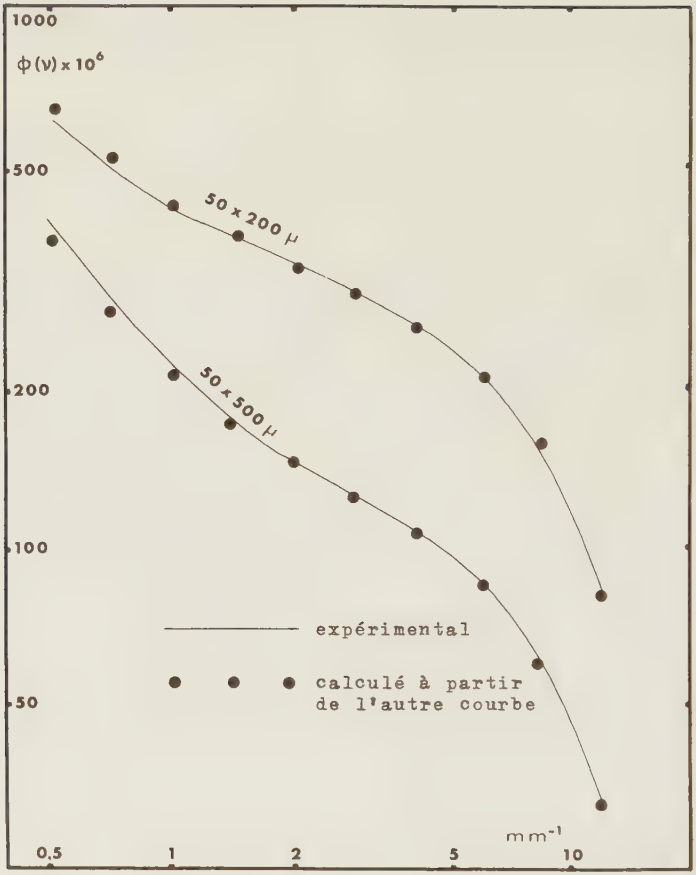


Fig.75 - Vérification expérimentale
de la deuxième méthode

IX - EVALUATIONS GLOBALES DE LA GRANULARITE

Comme nous l'avons vu précédemment (chapitre III), la granularité d'un film peut être caractérisée par une quantité unique, telle que la granularité Selwyn ou syzygétique, ou encore par une fonction telle que l'autocorrélation ou le spectre de Wiener. Dans ce dernier cas on a une analyse détaillée qui permet d'étudier des phénomènes tels que la formation d'agglomérats, le moutonnement dû aux écrans, etc... Dans le premier cas on a l'avantage d'une évaluation rapide qui permet de juger de la qualité d'un film, de dire si un échantillon est plus ou moins granuleux qu'une autre. Il faut bien entendu que cette "évaluation globale" soit obtenue à partir de critères valables, que l'importance relative donnée aux différentes fréquences spatiales soit conforme à celle qui leur est donnée dans les conditions réelles d'observation ou d'emploi du film. Nous verrons brièvement les relations entre le spectre de Wiener et la granularité Selwyn ou syzygétique ; nous passerons ensuite à un cas plus général et nous verrons divers problèmes qui s'y rapportent ; nous tenterons enfin d'apporter une solution au problème de la relation entre granulation et granularité.

A - Relations avec le spectre de Wiener

1°) - Granularité Selwyn

Si $\phi(\nu)$ est le spectre de Wiener mesuré par balayage avec une certaine tache d'exploration d'aire A, la granularité Selwyn G est donnée par la relation :

$$G^2 = \sigma_T^2 \cdot 2A = 2A \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\nu)\, d\nu$$

On emploie généralement une tache circulaire ce qui, d'après (II - 3), nous donne pour une émulsion très mince si R est le rayon de la tache :

$$G^2 = 2\pi R^2 \int_0^{+\infty} \left[\frac{J_1(2\pi R \rho)}{\pi R \rho} \right]^2 s(\rho) \cdot 2\pi\rho \, d\rho$$

ou encore :

$$G^2 = \int_0^{+\infty} \frac{4 J_1^2(2\pi R\rho)}{\rho} \, s(\rho) \, d\rho$$

Le carré de la granularité Selwyn est donc donné par l'intégrale :

$$\sigma^2 = \int_0^{+\infty} W(\rho)\, s_o(\rho)\, d\rho$$

où $W(\rho)$ est une fonction de pondération donnée par :

$$W(\rho) = \frac{4J_1{}^2(2\pi R\rho)}{\rho}$$

La fonction $W(\rho)$ est représentée sur la Fig.76 . Nous voyons dans quelles conditions la loi de Selwyn est vérifiée : le domaine dans lequel $W(\rho)$ diffère de zéro de façon appréciable est d'autant plus petit que la tache est plus grande. Si dans ce domaine la fonction $s(\rho)$ est peu différente d'une constante K, l'intégrale devient :

$$\sigma^2 = K \int_0^{+\infty} W(\rho)\, d\rho = 2K$$

En toute rigueur, la loi de Selwyn est vraie pour un spectre "blanc". Pratiquement elle est vérifiée si la tache est grande, et ne l'est pas si la tache est petite.

Si l'on admet que, pour un observateur normal, le diamètre angulaire d'un cône de la fovéa est de 3.10^{-4} radian et si on assimile grossièrement la tache d'exploration circulaire à une cellule sensible de la rétine, on a la relation :

$$d = 3.10^{-4}\ D$$

où d est le diamètre de la tache et D la distance à laquelle on regarde l'échantillon. Cette relation est valable pour l'examen direct ; si l'échantillon est agrandi sur papier ou projeté sur un écran avec un grandissement g, au moyen d'un appareil que nous supposerons pour l'instant donner une image parfaite, on a alors :

$$gd = 3.10^{-4}\ D$$

De cette façon, à l'examen direct à une distance de 32 cm correspond une tache de 96 microns de diamètre ; à la projection d'une image de 36 mm de large sur un écran de 1 mètre de large, vue à une distance de 2,22 mètres, correspond une tache d'exploration de 24 microns de diamètre.

2°) - Granularité syzygétique

La granularité syzygétique, dont nous avons vu la définition au chapitre III , se déduit également de $s_o(\rho)$ par une relation de la forme :

$$Z^2 = \int_0^{+\infty} W(\rho)\, s_o(\rho)\, d\rho$$

Cette relation, donnée par R. CLARK-JONES (71) est la suivante :

$$Z^2 = \int_0^{+\infty} \frac{4J_1^{\,2}(2\pi R\rho)\left[1-J_o(2\pi\sqrt{3}\,R\rho)\right]}{\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)}\, s_o(\rho)\, d\rho$$

La Fig. 76 représente les deux fonctions de pondération $W(\rho)$, pour une tache de 96 microns de diamètre. L'intégrale de ces deux fonctions entre 0 et $+\infty$ est égale à 2, ce qui fait que la loi de Selwyn s'applique de la même façon aux granularités Selwyn et syzygétique si $s_o(\rho) = \text{cte} = K$, on a alors

$$Z^2 = G^2 = 2K$$

3°) - Cas général

D'une façon très générale, on peut appeler "évaluation globale de la granularité" toute quantité X donnée par la relation :

$$X^2 = \int_0^{+\infty} W(\rho)\, s_o(\rho)\, d\rho$$

où $W(\rho)$ est une certaine fonction de pondération, ou même par

$$X^2 = \langle W, s_o \rangle$$

où W est une fonctionnelle linéaire quelconque pouvant être une distribution et non une fonction.

B - Problèmes d'équations intégrales

Différents types de problèmes se posent :

1°) - Détermination du spectre de Wiener à partir d'une évaluation globale dépendant d'un paramètre.

Une évaluation globale peut dépendre d'un paramètre et définir ainsi une fonction. Le spectre de Wiener peut être déterminé à partir de cette fonction en résolvant une équation intégrale de première espèce. Par exemple, la granularité Selwyn dépend du rayon R de la tache d'exploration et définit ainsi une fonction $G^2(R)$:

$$G^2(R) = \int_0^{+\infty} \frac{4J_1^2(2\pi R\rho)}{\rho} \, s_\delta(\rho) \, d\rho$$

Cette équation définit une équation intégrale dont la solution est la méridienne $s_\delta(\rho)$. Une formule d'inversion a été donnée par R. MARRIAGE et E. PITTS (220) :

$$s_\delta(\rho) = -4 \int_0^{+\infty} J_1(x) \; Y_1(x) \; Q\left(\frac{x}{\rho}\right) x \, dx$$

où la fonction Q est définie de la façon suivante :

$$Q(\alpha) = \frac{\pi}{8} \frac{d}{dR} \left[R \, G^2(R) \right] \quad \text{avec } \alpha = 2\pi R$$

et la fonction $Y_1(x)$ est une fonction liée aux fonctions de Bessel et définie comme suit :

$$Y_1(x) = \lim_{n \to 1} \frac{J_n(x) \cos nx - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$$

N.B. - Pour cette fonction $Y_1(x)$, MARRIAGE et PITTS ont utilisé les notations du livre de G.N. WATSON (221). D'autres auteurs comme G. PETIAU (222) appellent cette fonction $N_1(x)$.

2°) - Relations entre différentes expressions globales de la granularité.

Si une expression X_1 dépendant d'un paramètre α_1 est donnée par :

Fig. 76 - Fonctions de pondération correspondant aux granularités Selwyn et syzygétique pour un diamètre de tache de 96 microns

$$X_1(\alpha_1) = < K_{1\alpha}, s_o >$$

ou

$$X_1 = K_1 s_o$$

et si une expression X_2 dépendant d'un paramètre α_2 est donnée par :

$$X_2 = K_2 s_o,$$

on a alors la relation suivante entre les fonctions $X_1(\alpha_1)$ et $X_2(\alpha_2)$:

$$X_1 = K_1 K_2^{-1} X_2$$

Un ensemble assez complet de relations est donné par les articles de R. CLARK-JONES (71) et de R. MARRIAGE et E. PITTS (220). Citons la relation simple suivante qui donne, avec une précision de 1 à 2%, la granularité syzygétique en fonction de la granularité Selwyn :

$$Z^2(R) = \frac{64\ G^2(R) - 20\ G^2(2R) + G^2(4R)}{45}$$

3°) - Détermination d'une évaluation globale X à partir d'une forme quelconque $\phi(\nu)$ du spectre de Wiener.

Si l'on connaît l'expression d'une évaluation globale X à partir d'une certaine forme du spectre de Wiener, la méridienne $s_o(\rho)$ par exemple, on peut chercher quelle est son expression à partir d'une autre forme, un spectre mesuré $\phi(\nu)$ par exemple :

$$X = < W , s_o > = < W(\rho) , s_o(\rho) >$$

et

$$\phi = Ks \text{ ou } \phi(\nu) = < K_\nu(\rho) , s_o(\rho) > = < s_o(\rho), K_\nu(\rho) >$$

On cherche une fonctionnelle W' telle que :

$$X = < W' , \phi >$$

On a donc :

$$< W, s_o > = < W'(\nu), < K_\nu(\rho) , s_o(\rho) >>$$

$$= << W'(\nu), K_\rho^T(\nu) >, s_o(\rho) >$$

Donc :

$$W(\rho) = < W'(\nu), K_\rho^T(\nu) >$$

On voit ici une application de la "transposition" que nous avions mentionnée au chapitre VIII.

$$W = K^T W' \quad \text{ou} \quad W' = (K^T)^{-1} W$$

Prenons un exemple simple : à une tache d'exploration quelconque correspond une méridienne $s(\rho)$ et une forme intégrale $\phi(\nu)$. La granularité quadratique moyenne est donnée par :

$$\sigma^2 = \int_0^{+\infty} 2\pi\rho \; s(\rho)\, d\rho = \langle W, s \rangle$$

$$\sigma^2 = \int_0^{+\infty} 2 \cdot \phi(\nu)\, d\nu = \langle W', \phi \rangle$$

et l'on a :

$$\phi(\nu) = \int_\nu^{+\infty} \frac{2\rho}{\sqrt{\rho^2-\nu^2}}\, s(\rho)\, d\rho = \int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left[\frac{2\rho}{\sqrt{\rho^2-\nu^2}}\right] s(\rho)\, d\rho$$

$$\text{Donc } K_\nu(\rho) = \mathrm{Re}\ \frac{2}{\sqrt{\rho^2-\nu^2}}$$

La relation $W = K^T W'$ s'écrit :

$$W(\rho) = \int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left[\frac{2\rho}{\sqrt{\rho^2-\nu^2}}\right] 2.d\nu = \int_0^{\rho} \frac{4\rho}{\sqrt{\rho^2-\nu^2}}\, d\nu$$

En effectuant l'intégration on obtient bien $W(\rho) = 2\pi\rho$

La relation $W' = (K^T)^{-1} W$ s'écrit :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\ \frac{2\rho}{\sqrt{\rho^2-\nu^2}}\, W'(\nu)\, d\nu = 2\pi\rho$$

et cette équation intégrale a bien pour solution $W'(\rho) \equiv 2$.

C - Méthodes de calcul numérique

Pour un calcul numérique les deux méthodes que nous avons vues au chapitre précédent sont applicables :

1°) - Méthode matricielle

Si la fonction - ou même la distribution - W n'a pas une forme trop complexe, on peut représenter le "produit scalaire" $\langle W, s_\sigma \rangle$ par un produit scalaire de vecteurs :

$$X^2 = \langle W, s_o \rangle = \sum_{j=1}^{n} W^j s_j = W \cdot s_o$$

où les s_j sont les valeurs de la fonction s_o pour n valeurs de ρ , et les W_j un ensemble de n coefficients formant une matrice W à 1 ligne et n colonnes. Dans le cas où $W(\rho)$ est une fonction, on peut écrire :

$$W^j = \int_{B_j}^{B_{j+1}} W(\rho)\, d\rho$$

Si $\phi = As$, on a alors :

$$X^2 = W(A^{-1}\phi) = (WA^{-1})\,\phi$$

En effectuant le produit XA^{-1}, on a la nouvelle matrice-ligne qui donne X^2 à partir de ϕ.

2°) - Méthode par décomposition en gaussiennes.

Soit une méridienne $s_\sigma(\rho)$ ayant la forme d'une fonction gaussienne :

$$s_o(\rho) = a\ e^{-\rho^2/b^2}$$

$$X^2 = \langle W, s \rangle = a\, f(b)$$

où $f(b) = \langle W, e^{-\rho^2/b^2} \rangle$

Si $W(\rho)$ est une fonction :

$$f(b) = \int_o^{+\infty} W(\rho)\ e^{-\rho^2/b^2}\ d\rho$$

Dans le cas général on représente $s_\sigma(\rho)$ par une somme de fonctions gaussiennes :

$$s_\sigma(\rho) = a_1\ e^{-\rho^2/b_1^2} + a_2\ e^{-\rho^2/b_2^2} + \cdots\cdots$$

et l'on a :

$$X^2 = a_1 f(b_1) + a_2 f(b_2) + \ldots\ldots$$

Nous avons vu au chapitre précédent comment on peut déterminer a_1, b_1, a_2, b_2 ..... à partir d'une forme expérimentale $\phi(v)$. On peut donc en déduire la valeur de X^2.

D - Relation entre granulation et granularité

Il est plausible d'admettre que l'impression visuelle de granulation est une fonction croissante d'une quantité V telle que :

$$V^2 = \langle W, s_o \rangle$$

Le problème est de déterminer quelle est la fonctionnelle associée à l'oeil. A ce sujet on peut proposer la solution suivante : si $TM(\rho)$ est la fonction de transfert de modulation de l'oeil, on écrit :

$$V^2 = \int_o^{+\infty} \left[TM(\rho) \right]^2 s_o(\rho)\, 2\pi\rho \, d\rho$$

Il est en effet vraisemblable que la fonction de transfert de modulation de l'oeil représente aussi sa "sensibilité relative" aux différentes fréquences spatiales lorsqu'il perçoit la granulation. Différentes études expérimentales ont été faites sur le transfert de modulation de l'oeil, parmi lesquelles nous pouvons citer celles de S. OOUE (223), A. ARNULF et O. DUPUY (225) (226), de E.M. LOWRY et J.J. DE PALMA (224) et de O. BRYNGDAHL (227). Nous avons choisi ici le résultat publié par E.M. LOWRY et J.J. DE PALMA qui représente un effet global résultant à la fois de facteurs oculaires, nerveux et cérébraux car il a été obtenu par étude d'une illusion d'optique (l'effet Mach) et non par des mesures de répartition d'éclairement sur la rétine. Dans cette étude l'observation était faite à une distance de 14 pouces, soit 356 mm. La Fig.77 représente la fonction $TM(\rho)$ obtenue.

La formule précédente s'applique à l'observation directe à la distance $D_o = 356$ mm. Si l'on observe une image de l'échantillon, le grandissement étant g, le spectre $s_o(\rho)$ devient $g^2 s_o(g\rho')$, ρ' étant la fréquence spatiale dans le plan image. Si l'image est vue à une distance D au lieu de D_o, on a :

$$V^2 = \int_0^{+\infty} \left[TM(\rho')\right]^2 \; G^2 s_0(G\rho') \; 2\pi\rho' \, d\rho'$$

où

$$G = g \frac{D_0}{D}$$

Nous avons supposé jusqu'ici que l'image était parfaite. En toute rigueur il faut faire intervenir la fonction de transfert de modulation du système optique employé (projecteur ou agrandisseur). Celle-ci peut être ramenée au plan image ou au plan objet. Si on choisit de la prendre dans le plan objet, soit $TM'(\rho')$, la relation précédente devient :

$$V^2 = \int_0^{+\infty} \left[TM(\rho')\right]^2 \left[TM'(\rho')\right]^2 G^2 \, s_0(G\rho') 2\pi\rho' \, d\rho'$$

Si l'on prend comme variable $\rho = G \; \rho'$:

$$V^2 = \int_0^{+\infty} \left[TM(\rho/G)\right]^2 \left[TM'(\rho/G)\right]^2 s_0(\rho) \; 2\pi\rho \; d\rho$$

La fonction de pondération est maintenant égale à :

$$W(\rho) = 2\pi\rho \; \left[TM(\rho/G)\right]^2 \left[TM'(\rho/G)\right]^2$$

Si l'on appelle $W_0(\rho)$ la fonction :

$$W_0(\rho) = 2\pi\rho \left[TM(\rho)\right]^2$$

on a alors :

$$W(\rho) = \left[TM'(\rho/G)\right]^2 G \, W_0(\rho/G)$$

ou, si l'on néglige le facteur TM' :

$$W(\rho) = G \, W_0 \, (\rho/G)$$

Notons que l'intégrale de $W(\rho)$ entre 0 et $+\infty$ est proportionnelle à G^2 : l'impression visuelle de granulation est d'autant plus forte que l'image de l'échantillon est plus agrandie.

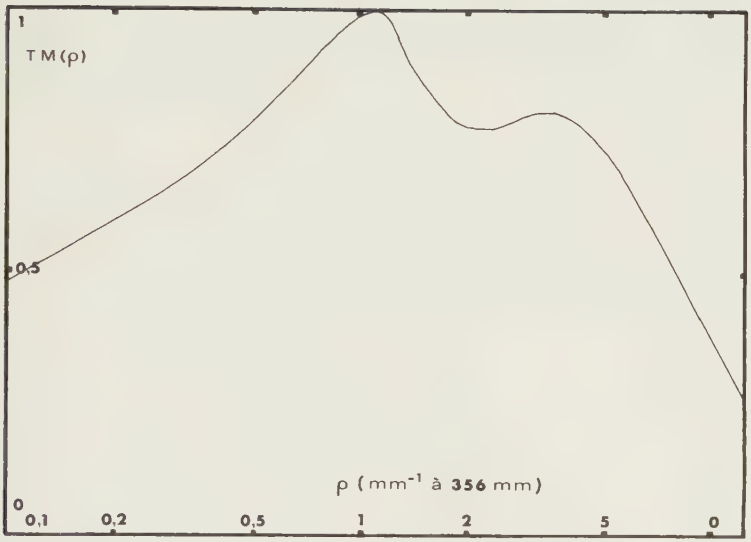


Fig. 77 - Fonction de transfert de modulation de l'oeil
(d'après LOWRY et DE PALMA)

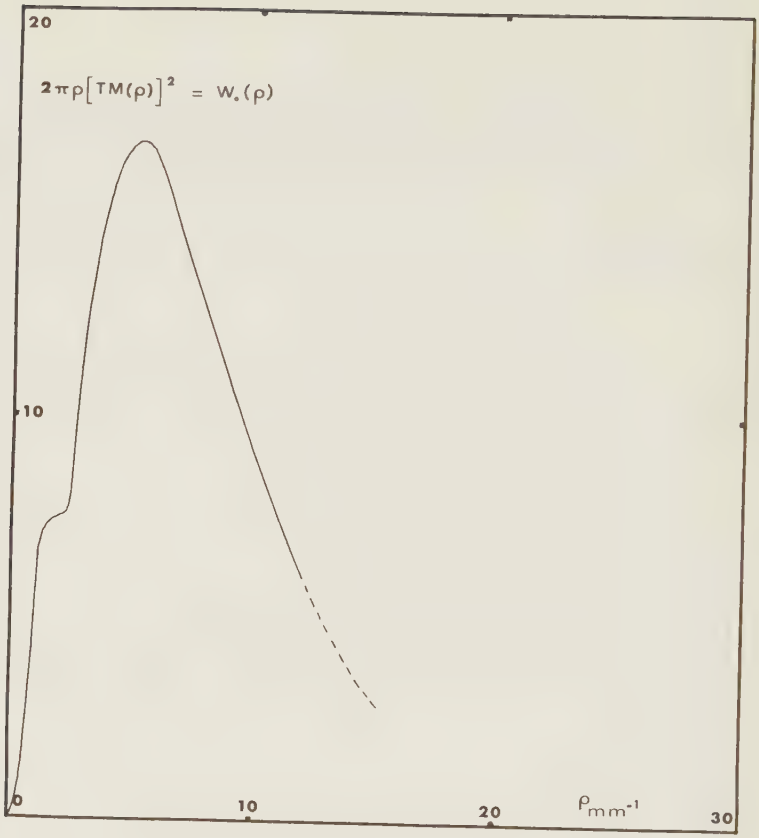


Fig. 78 - Fonction de pondération déduite de la fonction de transfert de modulation de l'oeil

La Fig. 79 représente un filtre que nous avons fait construire par la Société S.E.C.R.E. Ce filtre est destiné à être interposé entre le photomultiplicateur et le voltmètre à valeur efficace ; la courbe de réponse indiquée est pour une résistance de charge du photomultiplicateur de 10 K Ω , et pour une impédance d'entrée du voltmètre très grande. Si on emploie une tache d'exploration très étroite et de longueur L très grande, on a la relation :

$$\phi(v) = L\, s_o(v)$$

D'autre part, comme nous l'avons vu au chapitre IV , le spectre de Wiener $\Sigma(f)$ du signal électrique est égal à :

$$\Sigma(f) = \frac{1}{K\,v}\quad \phi(f/v) = \frac{L}{K\,v}\quad s_o(f/v)$$

où K est une constante. Si P(f) est le gain en puissance du filtre, on lit une tension efficace V_{eff} donnée par :

$$V_{eff}^{\,2} = 2\int_o^{+\infty} P(f)\quad \Sigma(f)\, df$$

Des équations précédentes on déduit :

$$V^2 = \int_o^{+\infty} \frac{KG}{L}\quad W_o\,(f/Gv)\quad \Sigma(f)\, df$$

Si l'on prend $P(f) = A\, W_o(f/B)$, on a :

$$G\,v = B = \text{cte}$$

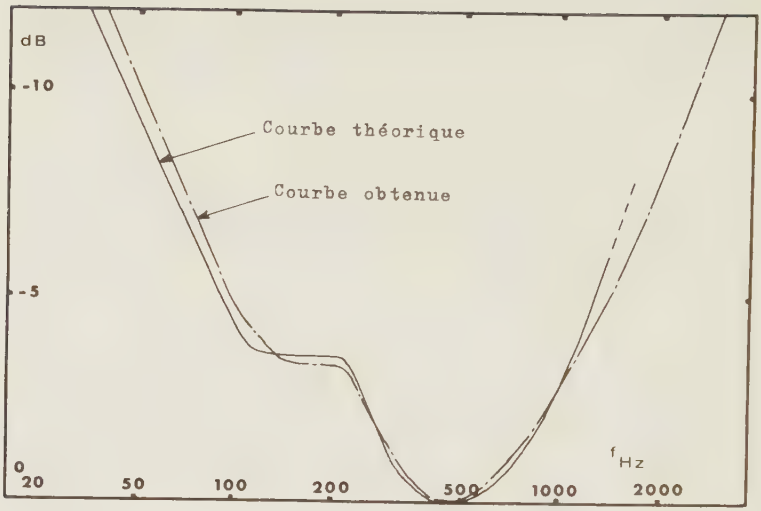
et d'autre part :

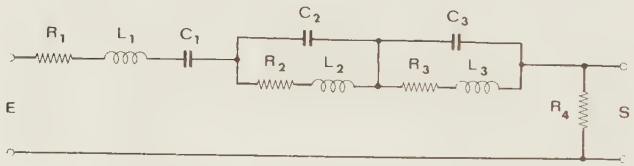
$$V^2 = \int_o^{+\infty} \frac{K\ G}{L\ A}\quad P(f)\ \Sigma(f)\, df$$

On a donc les relations :

$$v = B/G$$

$$V = C\ \sqrt{G}\ V_{eff}$$





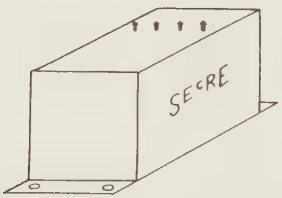


Fig. 79 - Filtre pour étude de la granulation

Nous avons pris B = 10 pour v en mm/s. Pour avoir le résultat correspondant à des grandissements variables (si l'on néglige le facteur TM', sinon cela reste vrai pour l'observation directe à des distances variables), il suffit de faire varier la vitesse linéaire de balayage v. La quantité V est alors proportionnelle au produit $\sqrt{G}\ V_{eff}$.

Il n'est pas impossible que la fonctionnelle représentant l'effet visuel soit une distribution : on constate en effet que l'oeil est très sensible à des moutonnements faibles représentés par des composantes gaussiennes "étroites" et nous avons vu que la répartition de ces gaussiennes était une distribution et non une fonction. Par ailleurs, à partir d'un spectre de Wiener mesuré $\phi(\nu)$ on est obligé de faire intervenir une distribution W' :

$$V^2 = \int_0^{+\infty} W(\rho)\ s_\delta(\rho)\ d\rho \quad = \langle W', \phi \rangle$$

Il peut bien entendu y avoir discussion sur le choix de la fonctionnelle représentant la réponse de l'oeil ; mais cette façon de voir apporte certainement la solution au problème de la relation entre granulation et granularité.

CONCLUSION

Dans cette étude nous avons tenté d'éclaircir un certain nombre de questions concernant la granularité photographique et sa mesure. Après avoir rappelé les définitions des diverses grandeurs utilisées, et les relations qui existent entre elles, nous avons étudié : l'effet Callier, c'est-à-dire l'influence de la diffusion de la lumière par l'émulsion développée ; l'échantillonnage; les"fonctions d'appareil", c'est-à-dire l'influence de la tache d'exploration ; les "évaluations globales", qui donnent la synthèse du phénomène après l'analyse faite par le spectre de Wiener. D'autres problèmes sont abordés, mais moins en détail : modèles statistiques, relation entre granulation et granularité. Ce travail doit permettre, nous l'espérons, de bien comprendre le phénomène et sa mesure, et de trouver pour chaque mesure les meilleures conditions.

APPENDICE - PROGRAMMES DE CALCUL

Pour l'étude des problèmes de fonctions d'appareil, les calculs ont été faits sur ordinateur I.B.M. 1401 à 16.000 positions de mémoire. Nous donnons ici les "listings" complets de ces programmes, accompagnés d'explications afin de permettre au lecteur de les employer, ou de les adapter à une autre machine. Le langage employé ici est le Fortran III. Les exemples donnés comprennent tous les résultats numériques utilisés dans le chapitre VIII .

A - Calcul de la matrice de transformation K donnant $\phi(v)$ à partir de $a(\rho)$

Les éléments de la matrice sont calculés au moyen de la formule (VIII - 7) :

- si $j < i$, $\quad K_i^j = 0$

- si $j \geq i$, $\quad K_i^j = \frac{2}{\pi L} \quad F\left(\pi L \sqrt{B_j^2 - v_i^2}\right) - F\left(\pi L \sqrt{B_{j+1}^2 - v_i^2}\right)$

où

$$F(x) = Si(2x) - \frac{\sin 2x}{x}$$

$$v_i = 0{,}5(\sqrt{2})^{i-1}$$

$$B_j \begin{cases} = v_i \text{ si } j = i \\ = \frac{2v_i}{1+\sqrt{2}} \text{ si } j > i \end{cases}$$

La fonction Si est calculée au moyen de la série :

$$Si(x) = x - \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} + \frac{x^7}{7.7!} \cdots\cdots$$

Cette série converge quel que soit x, mais si $x > 1$ les termes de la série, qui sont de signe alterné, commencent par augmenter avant de décroître et certains termes peuvent être très grands en valeur absolue devant la somme de la série. Il faut donc calculer chaque terme avec une grande précision. Pour cette raison le calcul est fait avec le plus grand nombre de chiffres significatifs permis par le compilateur c'est-à-dire 20 ; si l'un quelconque des termes atteint la valeur 10^{17}, le calcul de la série est arrêté et la somme Si(x) est prise égale à sa valeur limite pour $x \longrightarrow \infty$, soit $\pi/2$.

L'ordinateur lit une carte indiquant la longueur L de la fente d'exploration et imprime cette valeur. Il fait ensuite le calcul de la matrice. Quand ce calcul est terminé, il imprime le résultat et perfore un paquet de cartes qui peut être utilisé par le programme suivant ; la première carte de ce paquet donne la valeur de L et les 20 autres les éléments de la matrice.

B - Utilisation des résultats dans des produits multiples de matrices.

Ce programme calcule la matrice de conversion du spectre de Wiener obtenu avec une certaine tache rectangulaire au spectre obtenu avec une autre tache rectangulaire. La formule résulte de la relation (VIII - 8) :

$$\phi_2 = H_2 K_2 K_1^{-1} H_1 \phi_1$$

où les matrices diagonales H représentent l'effet de la largeur de la tache et les matrices triangulaires K représentent l'effet de la longueur de la tache.

L'ordre de lecture des cartes découle de la formule ci-dessus :

- d'abord une carte indiquant la nouvelle largeur de fente l_2.

- puis un paquet de 21 cartes qui représente la matrice K_2, calculée au moyen du programme précédent.

- puis un paquet de 21 cartes qui représente la matrice K_1, calculée aussi par le programme précédent.

- enfin une carte indiquant l'ancienne largeur de fente l_1.

Après avoir imprimé les données, l'ordinateur inverse la matrice K_1, imprime le résultat, calcule le produit $K_2K_1^{-1}$, imprime le résultat, calcule les matrices H_1 et H_2, calcule le produit $H_2K_2K_1^{-1}H_1^{-1}$, imprime le résultat et perfore un paquet de cartes dont la première donne les valeurs de l_1, L_1, l_2, L_2, et les 20 autres les éléments de la matrice $H_2K_2K_1^{-1}H_1^{-1}$.

S'il ne reste plus de cartes dans le lecteur, l'ordinateur s'arrête ; sinon il lit un paquet de 2 cartes donnant un spectre de Wiener à transformer, imprime le résultat, lit un nouveau paquet de 2 cartes, etc..., et s'arrête quand il ne reste plus de cartes.

C - Emploi direct de la matrice calculée par le programme précédent.

Ce programme effectue seulement la dernière phase du programme précédent, sans refaire le calcul de la matrice ce qui permet un emploi beaucoup plus rapide.

L'ordinateur lit d'abord la matrice (21 cartes), puis une carte indiquant le nombre de spectres à transformer, puis lit et transforme ces spectres ; s'il n'y a plus de cartes il s'arrête, sinon il lit une nouvelle matrice et recommence les mêmes opérations pour une nouvelle transformation.

D - Calcul de L o/a en fonction de bL

La fonction L o/a = f(bL) est calculée au moyen de la relation (VIII - 5) :

$$L\frac{o}{a} = 2\,bL \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin\pi.bL.z}{\pi.bL.z}\right)^2 e^{-z^2}\,dz$$

N'ayant pas trouvé de primitive, nous avons calculé numériquement l'intégrale par la méthode des trapèzes. L'intégration est faite seulement entre 0 et 5, car pour z = 5 on a déjà $e^{-z^2/2} = 3{,}7 \cdot 10^{-6}$; cet intervalle est divisé en 2^N parties égales et le calcul est arrêté quand la différence entre les résultats pour N - 1 et N est inférieure à 10^{-8} en valeur relative. Pour gagner du temps, chaque calcul utilise les résultats des calculs précédents : la moitié des ordonnées en effet sont déjà calculées.

L'ordinateur lit une carte donnant une valeur de bL, fait le calcul et imprime le résultat ; il lit ensuite une carte donnant une nouvelle valeur de bL, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de cartes dans le lecteur.

E - Programme général de transformation par la méthode de décomposition en gaussiennes.

Comme avec les programmes précédents, les fonctions sont définies par 10 points. Les fréquences spatiales sont encore prises en progression géométrique ce qui convient bien à ce type de problème. Les calculs sont faits pour des taches d'exploration rectangulaires ; une tache circulaire est supposée équivalente à une tache carrée de même surface. On calcule d'abord la fonction $\psi(v)$ au moyen de la formule :

$$\psi(\nu) = \frac{\phi(\nu)}{\left(\frac{\sin x\nu l}{x\nu l}\right)^2}$$

On procède ensuite à la décomposition de la fonction $\psi(\nu)$ en somme de fonctions de Gauss. La première composante $c_1\, e^{-\nu^2/b_1^2}$, la plus étalée, est calculée à partir des 2 ou 3 derniers points de la courbe. La méthode est la suivante : deux points (x_1,y_1) et (x_2,y_2) définissent une fonction gaussienne :

$$y = c\, e^{-x^2/b^2}$$

par les relations :

$$b = \frac{x_2^2 - x_1^2}{\text{Log } y_1 - \text{Log } y_2}$$

$$c = \frac{y_1}{e^{-x_1^2/b^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{y_2}{e^{-x_2^2/b^2}}$$

Ceci suppose, bien entendu, que y_1 et y_2 sont de même signe, et que la quantité sous le radical est positive ; sinon il n'est pas possible de définir une fonction gaussienne passant par ces deux points. Pour trois points, on définit une gaussienne "moyenne" de la façon suivante :

$$b_{12} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{\text{Log } y_1 - \text{Log } y_2}$$

$$b_{23} = \frac{x_3^2 - x_2^2}{\text{Log } y_2 - \text{Log } y_3}$$

$$b_{13} = \frac{x_3^2 - x_1^2}{\text{Log } y_1 - \text{Log } y_3}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{b_{12}} + \frac{1}{b_{23}} + \frac{1}{b_{13}}\right)$$

$$c = \frac{1}{3}\left(\frac{y_1}{e^{-x_1^2/b^2}} + \frac{y_2}{e^{-x_2^2/b^2}} + \frac{y_3}{e^{-x_3^2/b^2}}\right)$$

On a donc une première composante gaussienne $c_1\, e^{-\nu^2/b_1^2}$, on calcule la différence $\phi(\nu) - c_1\, e^{-\nu^2/b_1^2}$ et dans la suite, on ne tient plus compte des points qui ont servi pour le premier calcul. Pour les 2 ou 3 derniers des points qui restent, on calcule une deuxième composante $c_2\, e^{-\nu^2/b_2^2}$, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les points aient été utilisés

Avant chaque calcul on fait un certain nombre de tests destinés à éviter toute opération impossible : division par zéro, logarithme ou racine carrée d'une quantité négative. Ces tests déterminent le choix ou le rejet de tel ou tel point pour le calcul ; suivant le cas, une composante est calculée à partir de 2 ou 3 points. Le nombre de composantes obtenu à la fin du calcul est variable de 1 à 5 ; le plus souvent on a 4 composantes.

A partir des valeurs de c_1, b_1, c_2, b_2 .... on peut calculer toutes les autres fonctions : méridienne et forme intégrale du spectre de Wiener pour une tache infiniment petite, spectre qu'on obtiendrait avec une tache d'exploration différente de celle avec laquelle on a fait la mesure, autocorrélation. Pour calculer les diverses fonctions on utilise les formules du chapitre VIII . On se sert en particulier de la fonction $L\ c/a = f(bL)$, mais on ne refait pas l'intégration numérique comme dans le programme précédent, ce qui serait beaucoup trop long : les résultats obtenus avec le programme précédent ont permis de déterminer des formules donnant approximativement cette fonction et permettant son calcul rapide :

- Si $0 \leqslant bL < 0,1$: $L\frac{c}{a} \simeq 1,77245\ bL - 2,85\ (bL)^3$

- Si $0,1 \leqslant bL < 0,55$: $L\frac{c}{a} \simeq -0,0113493 + 1,9954\ bL - 1,36182\ (bL)^2$

- Si $bL \geqslant 0,55$: $L\frac{c}{a} \simeq 1 - 0,179587\ bL + 0,33.10^{-6}\ (bL)^2$

Les instructions de ce programme remplissent presque entièrement la mémoire de la machine et il reste peu de place pour les variables : aussi on emploie le plus possible l'instruction "EQUIVALENCE" et l'on utilise une mémoire auxiliaire : les résultats intermédiaires de la décomposition en gaussiennes sont enregistrés sur une bande magnétique, bande qui est ensuite relue à plusieurs reprises au cours des calculs qui suivent. Cette bande est placée en unité 2, l'unité 1 étant réservée au compilateur.

L'ordinateur lit d'abord une carte dite "carte maîtresse" qui indique la forme des taches d'exploration, le nombre de spectres à traiter, le premier terme et la raison de la progression géométrique des fréquences spatiales. La deuxième carte indique les dimensions de la tache avec laquelle on a fait la mesure, la troisième des dimensions de la tache pour laquelle on veut faire le calcul. Les cartes qui suivent donnent les spectres de Wiener à traiter, à raison de 2 cartes par spectre. Un certain nombre de tests sont d'abord faits pour vérifier que les données ont des ordres de grandeur acceptables. L'ordinateur calcule ensuite et imprime les 10 valeurs des fréquences spatiales. Il lit alors un spectre, calcule $\psi(v)$ et imprime le résultat. Il effectue la décomposition en gaussiennes, imprime la fonction obtenue en additionnant les composantes et les différences avec $\psi(v)$. Il calcule ensuite et imprime la méridienne, la forme intégrale, le spectre qu'on mesurerait avec une autre tache et l'autocorrélation. Sur une autre page la machine imprime tout le détail de la décomposition en gaussiennes.

L'ordinateur lit alors un autre spectre et refait les mêmes opérations. Quand le nombre prévu de spectres a été traité, il s'arrête s'il n'y a plus de cartes ; sinon il est prêt à lire une nouvelle carte maîtresse et à recommencer un nouveau problème avec des données initiales différentes.

```
SEQ   STMNT     FORTRAN STATEMENT

      C         CALCUL DE MATRICE TRIANGULAIRE
      C
      C         ORDINATEUR I.B.M. 1401 12K OU 16K - FORTRAN III
      C         2 CHIFFRES EN FIXE - 20 EN FLOTTANT
      C         TEMPS DE CALCUL - VARIABLE DE 5 A 20 MINUTES
      C         PH. BAUDRY KODAK-PATHE - NOVEMBRE 1965
      C
    1           DIMENSION FREQ(10),BORNE(11),FCT(11),A(10,10),B(11)
      C
    2       30  R2 = SQRTF (2.)
    3           PI = 3.141592653589793
    4           FREQ(1) = 0.5
    5           BORNE (1) = 0.5
    6           BORNE(2) = R2 / (1.+R2)
    7           DO 1 I=2,10
    8           FREQ(I) = FREQ(I-1) + R2
    9           IP1 = I+1
   10         1  BORNE(IP1) = 2. * R2 * FREQ(I) / (1.+R2)
   11       101  FORMAT (1H1//1H ,46X,1H./1H ,47X,1H.)
   12       102  FORMAT (1H ,5X,13HMERIDIENNE    ,31(1H.),16H  0.0000F 00  M ,E11.4,
                1 9H  MICRONS)
   13       105  FORMAT (1H ,47X,1H./1H ,46X,1H.//////)
      C
   14           READ 10,FLON
   15        10 FORMAT (21X,E11.4)
   16           PRINT 101
   17           PRINT 102,FLON
   18           PRINT 105
      C
   19           DO 9 I=1,10
   20           DO 9 J=1,10
   21         9 A(I,J) = 0.
   22           DO 5 I=1,10
   23           BORNE(I) = FREQ(I)
   24           IP1 = I + 1
   25           DO 2 J=IP1,11
   26         2 B(J) = PI * 0.001 * FLON * SQRTF (BORNE(J) **2 - FREQ(I) **2)
   27           FCT(I) = 0.
   28           DO 4 J=IP1,11
   29           X = B(J)
   30           Y = 2.*X
   31           ZN = 1.
   32           TG = Y
   33           FCT(J) = TG
   34         3 ZN = ZN + 2.
   35           TG = -1. * Y * TG / ZN / (ZN - 1.)
   36           TGN = TG / ZN
   37           FCT(J) = FCT(J) + TGN
   38           IF (FCT(J)) 31,3,31
   39        31 TEST = ABSF(TGN) -1.E17
   40           IF (TEST) 33,32,32
   41        32 FCT(J) = 1.5708
   42           GO TO 8
   43        33 TEST = ABSF (TGN / FCT(J)) -1.E-7

SEQ   STMNT     FORTRAN STATEMENT

   44           IF (TEST) 8,8,3
   45         8 C = SINF(X) ** 2  / X
   46         4 FCT(J) = 2. * (FCT(J) - C)
   47           DO 5 J=I,10
   48         5 A(I,J) =(FCT(J+1) - FCT(J)) / (PI * 0.001 * FLON)
      C
   49           PRINT 17
   50        17 FORMAT (1H , 5X,25HMATRICE DE TRANSFORMATION////)
   51           DO 6 I=1,10
   52           PRINT 11,(A(I,J),J=1,5)
   53         6 PRINT 12,(A(I,J),J=6,10)
   54        11 FORMAT (1H0,5(4X,E13.6))
   55        12 FORMAT (1H ,5(4X,E13.6))
   56           PUNCH 18,FLON
   57        18 FORMAT (5X,E11.4)
   58           DO 7 I=1,10
   59           PUNCH 28,(A(I,J),J=1,5)
   60         7 PUNCH 28,(A(I,J),J=6,10)
   61        28 FORMAT (5(3X,E13.6))
   62           PUNCH 16
   63        16 FORMAT (80X)
      C
   64           IF (SENSE SWITCH 01) 99,33
   65        99 PRINT 13
   66        13 FORMAT (1H1)
   67           STOP 999
   68           END
```

MERIDIENNE ..... 0.0000E 00 X 0.2000E 03 MICRONS

MATRICE DE TRANSFORMATION

0.607909E 00	0.688201E 00	0.722201E 00	0.821055E 00	0.843620E 00
0.633833E 00	0.196139E 00	0.608893E-01	0.173975E 00	0.692213E-01
0.000000E 00	0.856217E 00	0.942454E 00	0.922980E 00	0.907807E 00
0.672866E 00	0.210327E 00	0.596269E-01	0.175424E 00	0.691246E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.120107E 01	0.124953E 01	0.106102E 01
0.758972E 00	0.241277E 00	0.573014E-01	0.178273E 00	0.689420E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.167134E 01	0.155191E 01
0.971391E 00	0.314828E 00	0.536295E-01	0.183759E 00	0.686236E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.228926E 01
0.168792E 01	0.522551E 00	0.519288E-01	0.193733E 00	0.682036E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.304151E 01	0.140016E 01	0.908754E-01	0.208472E 00	0.684759E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.382001E 01	0.694663E 00	0.210059E 00	0.754302E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.437500E 01	0.278011E 00	0.126031E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.451407E 01	0.236722E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.460008E 01

B

```
SEQ   STMNT     FORTRAN STATEMENT

C
C             FONCTIONS D APPAREIL - EMPLOI DE MATRICES TRIANGULAIRES
C
C             ORDINATEUR I.B.M. 1401 16K - FORTRAN III
C             2 CHIFFRES EN FIXE - 10 EN FLOTTANT
C             TEMPS DE CALCUL - 2 MINUTES 1/2
C             PH. BAUDRY KODAK-PATHE - NOVEMBRE 1965
C
C             SI L ON NE DESIRE PAS PERFORER LA MATRICE RESULTANTE,
C             METTRE L INVERSEUR B EN FONCTION
C
    1         PI = 3.141592653589793
    2         DIMENSION A(10,20), B(10,10)
    3         DIMENSION S(10), SC(10)
    4         DIMENSION FREQ(10)
    5         FREQ(1) = 0.5
    6         R = SQRT(2.)
    7         DO 20 I=2,10
    8      20 FREQ(I) = FREQ(I-1) * R
C
    9     101 FORMAT (1H1//1H ,46X,1H./1H ,47X,1H.)
   10     102 FORMAT (1H ,5X,13HMERIDIENNE   ,3(1H.),16H  0.0000E 00  X ,E11.4,
              1 9H  MICRONS)
   11     103 FORMAT (1H ,5X,14HO.0000E 00  X ,E11.4,11H  MICRONS  ,B(1H.),12H
              1 MERIDIENNE)
   12     104 FORMAT (1H ,4X,E11.4,4H  X ,E11.4,11H MICRONS  ,A(1H.),1X,E11.4,4
              1 H  X ,E11.4,9H  MICRONS)
   13     105 FORMAT (1H ,47X,1H./1H ,46X,1H.//////)
C
   14         READ 1,ZLAR
   15       1 FORMAT (21X,E11.4)
   16         READ 60,ZLON
   17      60 FORMAT (5X,E11.4)
   18         DO 21 I=1,10
   19         READ 30,(B(I,J),J=1,5)
   20      21 READ 30,(B(I,J),J=6,10)
   21         READ 60,FLON
   22         DO 22 I=1,10
   23         READ 30,(A(I,J),J=1,5)
   24      22 READ 30,(A(I,J),J=6,10)
   25      30 FORMAT (5(3X,E13.6))
   26         READ 1,FLAR
   27         PRINT 101
   28         PRINT 102,ZLON
   29         PRINT 105
   30         PRINT 7
   31       7 FORMAT (1H , 5X,25HMATRICE DE TRANSFORMATION////)
   32         DO 23 I=1,10
   33         PRINT 5,(B(I,J),J=1,5)
   34      23 PRINT 6,(B(I,J),J=6,10)
   35       5 FORMAT (1HO,5(4X,E13.6))
   36       6 FORMAT (1H ,5(4X,E13.6))
   37         PRINT 101
   38         PRINT 102,FLON
   39         PRINT 105
   40         PRINT 7

SEQ   STMNT     FORTRAN STATEMENT

   41         DO 24 I=1,10
   42         PRINT 5,(A(I,J),J=1,5)
   43      24 PRINT 6,(A(I,J),J=6,10)
C
   44         DO 50 I=1,10
   45         DO 50 J=11,20
   46      50 A(I,J) = 0.
   47         DO 51 I=1,10
   48      51 A(I,I+10) = 1.
   49         DO 25 I=1,10
   50         IP1 = I + 1
   51         DO 25 J = IP1,20
   52      25 A(I,J) = A(I,J) / A(I,I)
   53         DO 26 KB = 1,9
   54         K = 10 - KB
   55         KA = K + 1
   56         DO 26 I=1,K
   57         IP10 = I + 10
   58         DO 26 J=IP10,20
   59      26 A(I,J) = A(I,J) - A(I,KA) * A(KA,J)
   60         PRINT 101
   61         PRINT 103,FLON
   62         PRINT 105
   63         PRINT 12
   64      12 FORMAT (1H , 5X,32HMATRICE INVERSE DE LA PRECEDENTE////)
   65         DO 54 I=1,10
   66         PRINT 5,(A(I,J),J=11,15)
   67      54 PRINT 6,(A(I,J),J=16,20)
C
   68         DO 52 I=1,10
   69         DO 52 K=1,10
   70         A(I,K) = 0.
   71         DO 52 J=1,K
   72      52 A(I,K) = A(I,K) + B(I,J)*A(J,K+10)
   73         X = 0.
   74         PRINT 101
   75         PRINT 104,X,FLON,K,ZLON
   76         PRINT 105
   77         PRINT 11
   78      11 FORMAT (1H , 5X,15HMATRICE PRODUIT////)
   79         DO 53 I=1,10
   80         PRINT 5,(A(I,K),K=1,5)
   81      53 PRINT 6,(A(I,K),K=6,10)
C
   82         DO 27 J=1,10
   83         U = PI * FREQ(J) * FLAR * 0.001
   84         DO 27 I=1,J
   85      27 A(I,J) = A(I,J)    / (SINF(U)/U) ** 2
   86         DO 28 I=1,10
   87         U = PI * FREQ(I) * ZLAR * 0.001
   88         DO 28 J=1,10
   89      28 A(I,J) = A(I,J) * (SINF(U)/U) ** 2
   90         PRINT 101
   91         PRINT 104,FLAR,FLON,ZLAR,ZLON
```

```
SEQ   STMNT      FORTRAN STATEMENT

 92               PRINT 105
 93               PRINT 2
 94         2     FORMAT (1H ,5X,14HRESULTAT FINAL////)
 95               DO 29 I=1,10
 96               PRINT 5,(A(I,J),J=1,5)
 97        29     PRINT 6,(A(I,J),J=6,10)
 98               IF (SENSE SWITCH 1) 31,40
 99        40     PUNCH 63,FLAR,FLON,ZLAR,ZLON
100        63     FORMAT (4(E11.4))
101               DO 41 I=1,10
102               PUNCH 30,(A(I,J),J=1,5)
103        41     PUNCH 30,(A(I,J),J=6,10)
104               PUNCH 42
105        42     FORMAT (80X)
      C
106               IF (SENSE SWITCH 0) 99,31
107        31     PRINT 101
108               PRINT 104,FLAR,FLON,ZLAR,ZLON
109               PRINT 105
110        33     READ 15,(S(I),I=1,5)
111               READ 15,(S(I),I=6,10)
112        15     FORMAT (20X,5(1X,E11.4))
113               PRINT 8
114         8     FORMAT (1HO,5X,20HSPECTRE EXPERIMENTAL)
115               PRINT 72,(S(I),I=1,5)
116               PRINT 73,(S(I),I=6,10)
117        72     FORMAT (1HO,5(6X,E11.4))
118        73     FORMAT (1H ,5(6X,E11.4))
119               DO 32 I=1,10
120               SC(I) = 0.
121               DO 32 J=1,10
122        32     SC(I) = SC(I) + A(I,J)*S(J)
123               PRINT 9
124         9     FORMAT (1HO,5X,15HSPECTRE DEDUIT )
125               PRINT 72,(SC(I),I=1,5)
126               PRINT 73,(SC(I),I=6,10)
127               PRINT 10
128        10     FORMAT (1HO)
129               IF (SENSE SWITCH 0) 99,33
130        99     PRINT 14
131        14     FORMAT (1H1)
132               STOP 999
133               END
```

MERIDIENNE ..... 0.0000E 00 X 0.2000E 03 MICRONS

MATRICE DE TRANSFORMATION

0.607909E 00	0.688201E 00	0.722201E 00	0.821055E 00	0.843620E 00
0.633033E 00	0.196139E 00	0.608893E-01	0.173975E 00	0.692213E-01
0.000000E 00	0.856217E 00	0.942454E 00	0.922980E 00	0.907807E 00
0.872866E 00	0.210327E 00	0.596269E-01	0.175424E 00	0.691246E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.120107E 01	0.124953E 01	0.106102E 01
0.758972E 00	0.241277E 00	0.573014E-01	0.178273E 00	0.689420E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.167134E 01	0.155191E 01
0.971391E 00	0.314828E 00	0.536295E-01	0.183759E 00	0.686236E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.228926E 01
0.168792E 01	0.522551E 00	0.519288E-01	0.193733E 00	0.682036E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.304151E 01	0.140016E 01	0.908754E-01	0.208472E 00	0.684759E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.382001E 01	0.694663E 00	0.210059E 00	0.754302E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.437500E 01	0.278011E 00	0.126031E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.451407E 01	0.236722E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.460008E 01

MERIDIENNE ..... 0.0000E 00 X 0.5000E 03 MICRONS

MATRICE DE TRANSFORMATION

0.595092E 00	0.580831E 00	0.416874E 00	0.196810E 00	0.191972E-01
0.748143E-01	0.239554E-01	0.282599E-01	0.221435E-01	0.118059E-01
0.000000E 00	0.820726E 00	0.669709E 00	0.286927E 00	0.300421E-01
0.737309E-01	0.257087E-01	0.287585E-01	0.222842E-01	0.117992E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.110485E 01	0.625771E 00	0.752842E-01
0.696244E-01	0.299432E-01	0.296969E-01	0.225326E-01	0.121969E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.142107E 01	0.384162E 00
0.566642E-01	0.412328E-01	0.312786E-01	0.228900E-01	0.124210E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.168881E 01
0.140622E 00	0.709506E-01	0.329672E-01	0.230209E-01	0.130351E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.180156E 01	0.975051E-01	0.337576E-01	0.213898E-01	0.143399E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.181531E 01	0.111181E 00	0.239274E-01	0.167667E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.189258F 01	0.554443E-01	0.182436E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.191448E 01	0.460343E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.194030E 01

0.0000E 00 x 0.5000E 03 MICRONS ..... MERIDIENNE

MATRICE INVERSE DE LA PRECEDENTE

0.168041E 01	-0.118923E 01	0.868179E-01	-0.308406E-01	0.519872E-02
-0.239036E-01	-0.498393E-02	-0.724493E-02	-0.577014E-02	-0.295121E-02
0.000000E 00	0.121843E 01	-0.738558E 00	0.792127E-01	-0.676988E-02
-0.232860E-01	-0.535715E-02	-0.738686E-02	-0.581447E-02	-0.280261E-02
0.000000E 00	0.000000E 00	0.905100E 00	-0.398563E 00	0.503152E-01
-0.263706E-01	-0.642665E-02	-0.764365E-02	-0.589603E-02	-0.301395E-02
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.703695E 00	-0.160073E 00
-0.963861E-02	-0.920957E-02	-0.812866E-02	-0.603054E-02	-0.305906E-02
0.000000F 00	0.000000E 00	0.000000F 00	0.000000E 00	0.592133E 00
-0.462193E-01	-0.206607E-01	-0.827634E-02	-0.610588E-02	-0.323520E-02
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.555074E 00	-0.298145E-01	-0.814929E-02	-0.559302E-02	-0.363535E-02
0.000000F 00	0.000000E 00	0.000000F 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.550870E 00	-0.323613E-01	-0.594764E-02	-0.431484E-02
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.528379E 00	-0.153071F-01	-0.460502E-02
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.522335E 00	-0.123926E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.515384E 00

0.0000E 00 x 0.5000E 03 MICRONS ..... 0.0000E 00 x 0.2000E 03 MICRONS

MATRICE PRODUIT

0.102154E 01	0.115581E 00	0.198165E 00	0.325696E 00	0.402945E 00
0.255318E 00	0.528004E-01	-0.800426E-02	0.633601E-01	0.189482E-01
0.000000E 00	0.104324F 01	0.220649E 00	0.341693E 00	0.431422E 00
0.277845E 00	0.579018E-01	-0.932865E-02	0.640592E-01	0.188230E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.108709E 01	0.400586E 00	0.488681E 00
0.328530E 00	0.691360E-01	-0.118352E-01	0.654661E-01	0.183833E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.117611E 01	0.651401E 00
0.451357E 00	0.970119E-01	-0.161975E-01	0.683028E-01	0.178201E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.135555E 01
0.831113E 00	0.170235E 00	-0.221743E-01	0.738725E-01	0.167140E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.168826E 01	0.680625E 00	-0.220804E-01	0.821628E-01	0.151910E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.210433E 01	0.243425E 00	0.763713E-01	0.165907E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.231166E 01	0.782681E-01	0.413622E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.235786E 01	0.660618E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.237081E 01

0.5000E 02 X 0.5000E 03 MICRONS ..... 0.5000E 02 X 0.2000E 03 MICRONS

RESULTAT FINAL

0.102154E 01	0.115819E 00	0.199393E 00	0.330427E 00	0.415612E 00
0.272241E 00	0.602097E-01	-0.104688E-01	0.110390E 00	0.623378E-01
0.000000E 00	0.104324E 01	0.221560E 00	0.345943E 00	0.444069E 00
0.295653E 00	0.658912E-01	-0.121759E-01	0.111379E 00	0.617986E-01
0.000000E 00	0.000000F 00	0.108709E 01	0.403903E 00	0.500940E 00
0.348149E 00	0.783523E-01	-0.153840E-01	0.113357E 00	0.601070E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.117611E 01	0.662258E 00
0.474384E 00	0.109041E 00	-0.208816E-01	0.117298E 00	0.577869E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.135555E 01
0.859194E 00	0.210319E 00	-0.281181E-01	0.124783E 00	0.533114E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.188826E 01	0.727888E 00	-0.270839E-01	0.134251E 00	0.468701E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.210433E 01	0.279199E 00	0.116685E 00	0.478650E-01
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.231166E 01	0.104261E 00	0.104042E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.235786E 01	0.124744E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00	0.237081E 01

0.5000E 02 X 0.5000E 03 MICRONS ..... 0.5000E 02 X 0.2000E 03 MICRONS

SPECTRE EXPERIMENTAL

0.3934E 03	0.2924E 03	0.2098E 03	0.1710E 03	0.1415E 03
0.1228E 03	0.1045E 03	0.8570E 02	0.6250E 02	0.3438E 02

SPECTRE DEDUIT

0.6408E 03	0.5248E 03	0.4268E 03	0.3720E 03	0.3265E 03
0.2911E 03	0.2528E 03	0.2082E 03	0.1517E 03	0.8151E 02

C

```
StQ   STMNT     FORTRAN STATEMENT

      C         PRODUIT D UNE MATRICE TRIANGULAIRE PAR UN VECTEUR
      C
      C         ORDINATEUR I.B.M. 1401 16K - FORTRAN III
      C         2 CHIFFRES EN FIXE - 10 EN FLOTTANT
      C         TEMPS DE CALCUL - 5 SECONDES PAR VECTEUR
      C         PH. BAUDRY KODAK-PATHE - MARS 1966
      C
    1             DIMENSION A(10,10), S(10), SC(10)
    2       101   FORMAT (1H1//1H ,46X,1H./1H ,47X,1H.)
    3       104   FORMAT (1H ,4X,E11.4,4H  X ,E11.4,11H  MICRONS  ,8(1H.),1X,E11.4,4
                1 H  X ,E11.4,9H  MICRONS)
    4       105   FORMAT (1H ,47X,1H./1H ,46X,1H./////)
      C                                  ↓
    5        64   READ 63,FLAR,FLON,ZLAR,ZLON
    6        63   FORMAT (4(E11.4))
    7             DO 22 I=1,10
    8             READ 30,(A(I,J),J=1,5)
    9        22   READ 30,(A(I,J),J=6,10)
   10        30   FORMAT (5(3X,E13.6))
   11             PRINT 101
   12             PRINT 104,FLAR,FLON,ZLAR,ZLON
   13             PRINT 105
   14             PRINT 2
   15         2   FORMAT (1H ,5X,25HMATRICE DE TRANSFORMATION////)
   16             DO 29 I=1,10
   17             PRINT 5,(A(I,J),J=1,5)
   18        29   PRINT 6,(A(I,J),J=6,10)
   19         5   FORMAT (1H0,5(4X,E13.6))
   20         6   FORMAT (1H ,5(4X,E13.6))
      C
   21             PRINT 101
   22             PRINT 104,FLAR,FLON,ZLAR,ZLON
   23             PRINT 105
   24             READ 65,N
   25        65   FORMAT (I2)
   26             DO 66 L = 1,N
   27             READ 15,(S(I),I=1,5)
   28             READ 15,(S(I),I=6,10)
   29        15   FORMAT (20X,5(1X,E11.4))
   30             PRINT 8
   31         8   FORMAT (1H0,5X,20HSPECTRE EXPERIMENTAL)
   32             PRINT 72,(S(I),I=1,5)
   33             PRINT 73,(S(I),I=6,10)
   34        72   FORMAT (1H0,5(6X,E11.4))
   35        73   FORMAT (1H ,5(6X,E11.4))
   36             DO 32 I=1,10
   37             SC(I) = 0.
   38             DO 32 J=1,10
   39        32   SC(I) = SC(I) + A(I,J)*S(J)
   40             PRINT 9
   41         9   FORMAT (1H0,5X,14HSPECTRE DEDUIT)
   42             PRINT 72,(SC(I),I=1,5)
   43             PRINT 73,(SC(I),I=6,10)
   44        66   PRINT 10
   45        10   FORMAT (1H0)
      C
   46             IF (SENSE SWITCH 0) 99,64
   47        99   PRINT 14
   48        14   FORMAT (1H1)
   49             STOP 999
   50             END
```

```
                                                    .
                                                    .
0.5000E 02  X  0.2000E 03  MICRONS  ........  0.5000E 02  X  0.5000E 03  MICRONS
                                                    .
                                                    .


MATRICE DE TRANSFORMATION

 0.978916E 00   -0.108677E 00   -0.157402E 00   -0.189003E 00   -0.114029E 00
 0.477528E-02    0.793204E-03   -0.320852E-03   -0.179890E-01   -0.108949E-01

 0.000000E 00    0.958549E 00   -0.195362E 00   -0.214857E 00   -0.136850E 00
 0.244181E-02    0.122612E-02    0.238257E-04   -0.181567E-01   -0.108374E-01

 0.000000E 00    0.000000E 00    0.919888E 00   -0.315910E 00   -0.185604E 00
-0.647184E-02    0.290771E-02    0.583528E-03   -0.184877E-01   -0.104318E-01

 0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00    0.850258E 00   -0.415397E 00
-0.275087E-01    0.697416E-02    0.146316E-02   -0.191502E-01   -0.100368E-01

 0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00    0.737710E 00
-0.375436E 00    0.561323E-01   -0.220506E-02   -0.203451E-01   -0.913236E-02

 0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00
 0.592324E 00   -0.204885E 00    0.318055E-01   -0.249873E-01   -0.764932E-02

 0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00
 0.000000E 00    0.475211E 00   -0.573952E-01   -0.209792E-01   -0.597159E-02

 0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00
 0.000000E 00    0.000000E 00    0.432590E 00   -0.191285E-01   -0.179776E-01

 0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00
 0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00    0.424114E 00   -0.223154E-01

 0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00
 0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00    0.000000E 00    0.421797E 00


SPECTRE EXPERIMENTAL

  0.6090E 03      0.4995E 03      0.4210E 03      0.3734E 03      0.3202E 03
  0.2902E 03      0.2497E 03      0.2046E 03      0.1465E 03      0.8085E 02

SPECTRE DEDUIT

  0.3656E 03      0.2689E 03      0.2038E 03      0.1716E 03      0.1430E 03
  0.1229E 03      0.1034E 03      0.8425E 02      0.6033E 02      0.3410E 02
```

D

```
SEQ   STMNT     FORTRAN STATEMENT
      C         CALCUL DE LC/A EN FONCTION DE BL
      C
      C         ORDINATEUR I.B.M. 1401 12K OU 16K - FORTRAN III
      C         2 CHIFFRES EN FIXE - 12 EN FLOTTANT
      C         TEMPS DE CALCUL - 0,81 * 2**N  POUR N ITERATIONS
      C         PH. BAUDRY KODAK-PATHE - JUIN 1965
      C
    1       1   FORMAT (E11.4)
    2       3   FORMAT (1H1,11X,2HBL,19X,4HLC/A,21X,16HNB. D ITERATIONS)
    3       4   FORMAT (1HO,10X,E11.4,10X,E15.8,10X,I2)
    4       5   FORMAT (1H1)
      C
    5           PRINT 3
    6      21   READ 1,BL
    7           AIRE = 5.
    8           N = 0
    9      22   P = 2. ** N
   10           N = N+1
   11           SOM = 0.
   12           VK = 0.
   13      23   VK = VK + 1.
   14           Z = 5. *(1. - (VK - 0.5)/P)
   15           V = 3.1415927 * BL * Z
   16           S = (SINF(V) / V) ** 2
   17           E = EXPF (0. - Z ** 2)
   18           SOM = SOM + S*E
   19           IF (P-VK) 24,24,23
   20      24   SOM = SOM * 10./P
   21           DIFF = ABSF (AIRE - SOM) / AIRE
   22           AIRE = 0.5 *(AIRE + SOM)
   23           IF (DIFF - 1.E-8) 25,25,22
   24      25   AIRE = AIRE * BL
   25           PRINT 4,BL,AIRE,N
   26           IF (SENSE SWITCH 0) 99,21
   27      99   PRINT 5
   28           STOP 999
   29           END
```

BL	LC/A	NB. D ITERATIONS
0.5000E-02	0.88619048E-02	4
0.1000E-01	0.17721624E-01	4
0.2000E-01	0.35425771E-01	4
0.5000E-01	0.88260037E-01	4
0.1000E 00	0.17438637E 00	4
0.2000E 00	0.33288558E 00	4
0.3000E 00	0.46505542E 00	4
0.4000E 00	0.56804521E 00	5
0.5000E 00	0.64496444E 00	5
0.6000E 00	0.70157736E 00	5
0.7000E 00	0.74361270E 00	5
0.8000E 00	0.77554257E 00	5
0.9000E 00	0.80046234E 00	5
0.1000E 01	0.82041328E 00	5
0.2000E 01	0.91020643E 00	5
0.3000E 01	0.94013761E 00	6
0.4000E 01	0.95510321E 00	6
0.5000E 01	0.96408256E 00	6
0.6000E 01	0.97006880E 00	7
0.8000E 01	0.97755160E 00	7
0.1000E 02	0.98204127E 00	7

E

```
SEQ    STMNT    FORTRAN STATEMENT

                PROBLEME DE FONCTIONS D APPAREIL DANS LA MESURE DES SPECTRES DE
                WIENER AU GRANULAROMETRE

                ORDINATEUR I.B.M. 1401 16K - FORTRAN III
                2 CHIFFRES EN FIXE - 6 EN FLOTTANT
                PLACER UNE BANDE DE TRAVAIL EN UNITE 2
                TEMPS DE CALCUL - 1 MINUTE PAR SPECTRE

                PH.BAUDRY - KODAK-PATHE VINCENNES
                LABORATOIRE DE RECHERCHES PHYSIQUES - SEPTEMBRE 1965


                FREQUENCES SPATIALES EN PROGRESSION GEOMETRIQUE

                CARTE MAITRESSE

                      COL 1 - R SI LA TACHE D EXPLORATION EST RECTANGULAIRE
                              C SI ELLE EST CIRCULAIRE
                              M SI LES DONNEES SONT DES MERIDIENNES DE SPECTRES
                DE WIENER
                              I SI LES DONNEES SONT DES FORMES INTEGRALES DE
                SPECTRES DE WIENER

                      COL 2 - R OU C SI L ON DESIRE CALCULER LE SPECTRE QU ON
                OBTIENDRAIT AVEC UNE AUTRE TACHE D EXPLORATION
                              ZERO DANS LE CAS CONTRAIRE

                      COL 3-4 - NOMBRE DE SPECTRES A TRAITER, SI L ON DESIRE
                PASSER SANS INTERRUPTION A UN AUTRE PROBLEME AVEC UNE NOUVELLE
                CARTE MAITRESSE - SINON 00

                      COL 5-17 - LA PLUS BASSE FREQUENCE SPATIALE EN MM-1,
                FORMAT E13.6

                      COL 24-38 - RAISON DE LA PROGRESSION GEOMETRIQUE,
                FORMAT E13.6

                SECONDE CARTE

                      COL 22-32 - LARGEUR OU DIAMETRE DE LA TACHE, EN MICRONS,
                FORMAT E11.4

                      COL 24-34 - LONGUEUR DE LA TACHE SI ELLE EST RECTANGULAIRE,
                RIEN SI ELLE EST CIRCULAIRE

                TROISIEME CARTE - COMME LA PRECEDENTE - SEULEMENT S IL Y A R OU C
                EN COLONNE 3 DE LA CARTE MAITRESSE

                ENSUITE SPECTRES DE WIENER A TRAITER, 2 CARTES PAR SPECTRE,
                FORMAT 20X,5(1X,E11.4) - NOMBRE MAXIMUM 99

                EVENTUELLEMENT NOUVEAU PROBLEME AVEC NOUVELLE CARTE MAITRESSE -
                SEULEMENT SI UN NOMBRE ETAIT INDIQUE EN COLONNES 5 ET 6 DE LA
                CARTE MAITRESSE PRECEDENTE
```

```
SEQ    STMNT    FORTRAN STATEMENT

                C
                C
                C       POUR FAIRE LE CALCUL AVEC MOINS DE 10 POINTS, SOIT 10 - N POINTS,
                C       PRENDRE ZERO COMME VALEUR DE L ORDONNEE POUR LES N DERNIERS POINTS
                C       QUI SERONT ALORS IGNORES PAR LE CALCUL
                C
                C
                C
                C
                C       PHASE I - LECTURE ET VERIFICATION DES DONNEES
                C
          1             RPI = 1.77245
          2             PI = 3.14159
          3             PRINT 60
          4       60    FORMAT (1H1)
          5       61    FORMAT (I3,I1,I2,2(E13.6))
          6             DIMENSION FREQ(10)
                C
          7      101    READ 61,K1,K2,NS,FREQ(1),R
          8             IF ((K1+9) * (K1+8) * (K1-3) * (K1-9)) 102,103,102
          9      102    PRINT 62
         10             PAUSE 111
         11             GO TO 101
         12       62    FORMAT (1H ,44HCARTE MAITRESSE ABSENTE OU DONNEES INEXACTES///1H ,
                1       83HREMETTRE EN PLACE LES DONNEES CORRECTES AVEC CARTE MAITRESSE ET
                2       APPUYER SUR DEPART/1H1)
         13      103    CONTINUE
         14             IF ((K2+9) * K2 * (K2-3)) 102,104,102
         15      104    CONTINUE
         16             DO 105 I=2,10
         17      105    FREQ(I) = FREQ(I-1) * R
         18             PRINT 63
         19       63    FORMAT                (1H ,28HFREQUENCES SPATIALES EN MM-1//)
         20             PRINT 64,(FREQ(I),I=1,5)
         21             PRINT 64,(FREQ(I),I=6,10)
         22       64    FORMAT (1H ,1X,5(5X,E11.4))
         23             NP = 10
         24             IF (K1+9) 102,106,107
         25      106    READ 65,FLAR,FLON
         26       65    FORMAT (20X,5(1X,E11.4))
         27             PRINT 66,FLAR,FLON
         28       66    FORMAT (1HO,1VHTACHE RECTANGULAIRE,2X,E11.4,4H  X ,E11.4,2X,7HMICR
                1       ONS)
         29             GO TO 501
         30      107    CONTINUE
         31             IF (K1-3) 301,108,301
         32      108    READ 65,FDIA
         33             FLAR = FDIA * SQRTF (3.1415927)* 0.5
         34             FLON = FLAR
         35             PRINT 98,FDIA
         36       98    FORMAT (1HO,26HTACHE CIRCULAIRE, DIAMETRE,E11.4,1X,7HMICRONS)
         37             PRINT 67,FLAR,FLON
         38       67    FORMAT (1H ,24HTACHE CARREE EQUIVALENTE,E11.4,4H  X ,E11.4,8H MICR
                1       ONS)
         39      501    NP = 11
         40      109    NP = NP - 1
         41             IF (FREQ(NP) * FLAR * 0.001 - 0.9) 114,114,110
```

```
SEQ   STMNT     FORTRAN STATEMENT
 42     110      CONTINUE
 43              IF (NP - 5) 111,111,109
 44     111      PRINT 68
 45      68      FORMAT (1HO,53HTACHE TROP LARGE POUR LE DOMAINE DE FREQUENCES ETUD
                1 IE/1H1)
 46              IF (NS) 99,99,112
 47     112      DO 113 I=1,NS
 48              READ 69
 49     113      READ 69
 50      69      FORMAT (80X)
 51              IF (K2) 260,119,260
 52     260      READ 69
 53              GO TO 119
 54     114      CONTINUE
 55              IF (NP - 10) 116,502,502
 56     116      PRINT 70,NP
 57      70      FORMAT (1HO,53HTACHE TROP LARGE POUR LE DOMAINE DE FREQUENCES ETUD
                1 IE/  1H ,10HSEULS LES ,I1,46H PREMIERS POINTS INTERVIENDRONT DANS
                2 LE CALCUL/)
 58     502      CONTINUE
 59     817      FORMAT (1HO,31HLARGEUR INFERIEURE A 20 MICRONS/1H ,  56HRESULTATS
                1 DES CALCULS DONNES A TITRE INDICATIF SEULEMENT//)
 60              IF (FLAR - 20.) 117,301,301
 61     117      PRINT 817
                C
 62     301      CONTINUE
 63              IF (K2 - 3) 303,302,306
 64     302      READ 65,ZDIA
 65              ZLAR = ZDIA * RPI * 0.5
 66              ZLON = ZLAR
 67              GO TO 306
 68     303      CONTINUE
 69              IF (K2 + 9) 306,304,306
 70     304      READ 65,ZLAR,ZLON
 71     306      CONTINUE
 72              DIMENSION S(10)
 73              NO = 0
                C
 74     119      NO = NO + 1
 75              READ 65,(S(I),I=1,5)
 76              READ 65,(S(I),I=6,10)
 77              IF((K1+9) * (K1-3))125,122,125
 78     120      CONTINUE
 79              IF (FLAR) 102,280,121
 80     121      PRINT 71
 81      71      FORMAT (1HO,30HSPECTRE DE WIENER EXPERIMENTAL//)
 82              PRINT 64,(S(I),I=1,5)
 83              PRINT 64,(S(I),I=6,10)
 84              DO 123 I=1,NP
 85              U = 0.001 *      PI     * FREQ(I) * FLAR
 86              IF (U - 1.E-10) 123,123,122
 87     122      S(I) =  S(I) *(U  / SINF (U)) ** 2
 88     123      CONTINUE
 89     280      PRINT 72
```

```
SEQ   STMNT     FORTRAN STATEMENT
 90      72      FORMAT (1HO,41HSPECTRE CORRIGE DE LA LARGEUR DE LA FENTE//)
 91              GO TO 129
 92     125      CONTINUE
 93              IF (K1+4) 127,126,127
 94     126      PRINT 73
 95      73      FORMAT (1HO,31HMERIDIENNE DU SPECTRE DE WIENER//)
 96              GO TO 129
 97     127      CONTINUE
 98              IF (K1-9) 129,128,129
 99     128      PRINT 74
100      74      FORMAT (1HO,36HFORME INTEGRALE DU SPECTRE DE WIENER//)
101     129      PRINT 64,(S(I),I=1,5)
102              PRINT 64,(S(I),I=6,NP)
                C
                C       PHASE 2 - DECOMPOSITION EN GAUSSIENNES
                C
103              DIMENSION Y(10), B(5), A(5), Z(10), SR(10), ERR(10), LL(5), NN(5)
104              EQUIVALENCE (Z(1),SR(1),ECART(1))
                C
105              REWIND 2
106              DO 12 I=1,NP
107      12      Y(I) = S(I)
108              N = NP
109              M = 0
110      14      L = 3
111              IF (N-2) 38,15,16
112      15      L = 2
113              IF (Y(N) * Y(N-1)) 38,38,32
114      16      CONTINUE
115              IF (Y(N)) 28,27,28
116      27      N = N-1
117              GO TO 14
118      28      CONTINUE
119              IF (Y(N) * Y(N-1)) 29,29,30
120      29      N = N-2
121              GO TO 14
122      30      CONTINUE
123              IF (Y(N) * Y(N-2)) 31,31,32
124      31      L = 2
125      32      CONTINUE
126              IF (N - 4) 602,601,602
127     601      L = 2
128     602      BINV = 0.
129              DO 34 K=1,L
130              I = N + 1 - K
131              J = N - K + L*(K/L)
132              T = ABSF (Y(I)) - ABSF (Y(J))
133              T = T / (FREQ(I) - FREQ(J))
134              IF (T) 33,34,34
135      33      VL = LOGF (Y(I) / Y(J))
136              C = FREQ(J)**2 - FREQ(I)**2
137              BINV = BINV + SORTF (VL/C)
138      34      CONTINUE
139              M = M+1
140              BINV = BINV / FLOATF (L)
```

```
SEQ    STMNT      FORTRAN STATEMENT

141               A(M) = 0.
142               DO 35 K=1,L
143               I = N + 1 - K
144               U = 0. - (FREQ(I) * BINV) ** 2
145        35     A(M) = A(M) + Y(I) / EXPF (U)
146               A(M) = A(M) / FLOATF (L)
147               DO 36 I=1,NP
148               U = 0. - (FREQ(I) * BINV) ** 2
149        36     Z(  I) = A(M) * EXPF(U)
150               WRITE TAPE 2,(Z(I),I=1,NP)
151               DO 37 I=1,NP
152        37     Y(I) = Y(I) - Z(  I)
153               B(M) = 1.E19
154               IF (BINV  - 1.E-19) 52,52,51
155        51     B(M) = 1. / BINV
156        52     CONTINUE
157               WRITE TAPE 2,(Y(I),I=1,NP),A(M)
158               NN(M) = N
159               LL(M) = L
160               N = N - L
161               GO TO 14
162        38     DO 50 I=1,NP
163        50     SR(I) = S(I) - Y(I)
164               DO 40 I=1,NP
165               SMAX = SR(I)
166               IF (S(I) - SR(I)) 40,40,39
167        39     SMAX = S(I)
168        40     ERR(I) = (Y(I)/SMAX) * 100.
169               PRINT 75,M
170        75     FORMAT (1HO,37HSPECTRE RECONSTITUE PAR UNE SOMME DE ,I1,12H GAUSSI
                  1 ENNES//)
171               PRINT 64,(SR(I),I=1,5)
172               PRINT 64,(SR(I),I=6,NP)
173               PRINT 76
174        76     FORMAT (1HO,11HDIFFERENCES//)
175               PRINT 64,(Y(I),I=1,5)
176               PRINT 64,(Y(I),I=6,NP)
177               PRINT 77
178        77     FORMAT (1HO,21HDIFFERENCES RELATIVES//)
179               PRINT 78,(ERR(I),I=1,5)
180               PRINT 78,(ERR(I),I=6,NP)
181        78     FORMAT (1H ,12X,5(5X,F7.2,2H %))
182               END FILE 2
183               REWIND 2
184               GO TO 200
C
C
C                 PHASE 3 - CALCUL DES AUTRES FORMES DU SPECTRE DE WIENER
C
C
C                 SOUS-PROGRAMME - CALCUL DE LC/A
C
185        19     BL = B(K) * FEN
186               IF (BL - 0.55) 21,21,20
187        20     AIRE = 1. - 0.179587  /BL + 0.33C-6/BL**2
188               GO TO 26

SEQ    STMNT      FORTRAN STATEMENT

189        21     CONTINUE
190               IF (BL - 0.1) 23,23,22
191        22     AIRE = -0.1134493E-1 + 1.99354 *BL - 1.36182  *BL**2
192               GO TO 26
193        23     AIRE = 1.77245 * BL - 2.85*BL**3
194        26     AIRE = AIRE / FEN
195               GO TO (203,214),IND
C
C                 CALCUL DE LA MERIDIENNE
C
196               DIMENSION SM(10), AI(5)
C
197        200    DO 503 I=1,NP
198        503    SM(I) = 0.
199               IF (K1+4) 201,206,201
200        201    IND = 1
201               FEN = FLON * 0.001
202               DO 205 K=1,M
203               IF (K1-9) 19,202,102
204        202    AIRE = B(K) * RPI
205        203    AI(K) = AIRE
206               A(K) = A(K) / AIRE
207               READ TAPE 2,(Z(I),I=1,NP)
208               READ TAPE 2,(Y(I),I=1,NP)
209               DO 205 I=1,NP
210        205    SM(I) = SM(I) + Z (I) / AIRE
211               PRINT 79
212         79    FORMAT (1HO,10HMERIDIENNE//)
213               PRINT 64,(SM(I),I=1,5)
214               PRINT 64,(SM(I),I=6,NP)
215               REWIND 2
216               GO TO 206
217        206    DO 250 K = 1,M
218        250    AI(K) = 1.
219        208    CONTINUE
C
C                 CALCUL DE LA FORME INTEGRALE
C
220               IF (K1 - 9) 209,211,102
221        209    DO 251 I=1,NP
222        251    SM(I) = 0.
223               DO 210 K=1,M
224               READ TAPE 2,(Z(I),I=1,NP)
225               READ TAPE 2,(Y(I),I=1,NP)
226               DO 210 I = 1,NP
227        210    SM(I) = SM(I) + Z(I) * B(K) * RPI / AI(K)
228               PRINT 80
229         80    FORMAT (1HO,15HFORME INTEGRALE//)
230               PRINT 64,(SM(I),I=1,5)
231               PRINT 64,(SM(I),I=6,NP)
232               REWIND 2
233        211    CONTINUE
C
C                 SPECTRE CALCULE POUR UNE AUTRE TACHE D EXPLORATION
C
234               IF ((K2+9) * (K2-3)) 350,212,350
```

```
SEQ   STMNT     FORTRAN STATEMENT

235     212     IND = 2
236             FEN = ZLON * 0.001
237             DO 213 I=1,NP
238     213     SM(I) = 0.
239             DO 215 K=1,M
240             GO TO 19
241     214     CONTINUE
242             READ TAPE 2,(Z(I),I=1,NP)
243             READ TAPE 2,(Y(I),I=1,NP)
244             DO 215 I=1,NP
245     215     SM(I) = SM(I) + Z (   I) * AIRE/AI(K)
246             DO 217 I=1,NP
247             U = 3.14159265 * FREQ(I) * ZLAR * 0.001
248             IF (U - 1.E-10) 217,217,216
249     216     SM(I) = SM(I) *(SINF(U) / U) ** 2
250     217     CONTINUE
251             IF ((K2+9)) 102,218,219
252     218     PRINT 81,ZLAR,ZLON
253      81     FORMAT (1H0,44HSPECTRE CALCULE POUR UNE TACHE RECTANGULAIRE DE ,E1
    1       1.4,4H  X ,E11.4,8H MICRONS//1
254     219     CONTINUE
255             IF ((K2-31) 230,220,230
256     220     PRINT 82,ZDIA
257      82     FORMAT (1H0,54HSPECTRE CALCULE POUR UNE TACHE CIRCULAIRE DE DIAMET
    1       RE ,E11.4,8H MICRONS//)
258     230     PRINT 84,(SM(I),I=1,5)
259             PRINT 84,(SM(I),I=6,NP)
260             REWIND 2
261      19     CONTINUE
C
C            CALCUL DE L AUTOCORRELATION
C
262             DIMENSION AUT (10), ECART(10)
263             EQUIVALENCE (AUT(1),Y(1))
C
264             DO 231 I=1,NP
265             IA = NP - I + 1
266     231     ECART (I) = 1000. / FREQ(IA)
267             PRINT 83
268      83     FORMAT (1H0,17HECARTS EN MICRONS//)
269             PRINT 84,(ECART(I),I=1,5)
270             PRINT 84,(ECART(I),I=6,NP)
271             DO 252 I=1,NP
272     252     AUT(I) = 0.
273             DO 232 K=1,M
274             DO 232 I=1,NP
275             ARG = 0. - (     PI      * P(K) * ECART(I) * 0.001) ** 2
276     232     AUT(I) = AUT(I) +     PI      *  A(K) * B(K)**2 * EXPF(ARG)
277             PRINT 84
278      84     FORMAT (1H0,15HAUTOCORRELATION//)
279             PRINT 84,(AUT(I),I=1,5)
280             PRINT 84,(AUT(I),I=6,NP)
281             PRINT 60
C
```

```
SEQ   STMNT     FORTRAN STATEMENT

C            IMPRESSION DU DETAIL DE LA DECOMPOSITION EN GAUSSIENNES
C
282             DIMENSION NL(4)
C
283             PRINT 85
284      85     FORMAT (1H ,30X,41HDETAIL DE LA DECOMPOSITION EN GAUSSIENNES///1H
    1       ,20HSPECTRE A DECOMPOSER//)
285             PRINT 84,(S(I),I=1,5)
286             PRINT 84,(S(I),I=6,NP)
287      86     FORMAT (1H0,14HCOMPOSANTE NO ,I1,30H, CALCULEE AVEC LES POINTS NOS
    1       ,4(I4,I2))
288      87     FORMAT (1H0,6HRESIDU//)
289      88     FORMAT (1H0,5HB   = ,E11.4,1UX,5HC   = ,E11.4)
290             DO 237 K=1,M
291             PRINT 97
292      97     FORMAT (1H0,55X,5(8X,1H*)/)
293             NL(1) = NN(K) - LL(K) + 1
294             LLK = LL(K)
295             DO 236 I=2,LLK
296     236     NL(I) = NL(I-1) + 1
297             READ TAPE 2,(Z(I),I=1,NP)
298             READ TAPE 2,(Y(I),I=1,NP),A(K)
299             PRINT 86,K,(NL(I),I=1,LLK)
300             PRINT 10
301      10     FORMAT (1H )
302             PRINT 84,(Z(I),I=1,5)
303             PRINT 84,(Z(I),I=6,NP)
304             PRINT 88,B(K),A(K)
305             PRINT 87
306             PRINT 84,(Y(I),I=1,5)
307     237     PRINT 84,(Y(I),I=6,NP)
308             REWIND 2
309             PRINT 60
C
C            PHASE 4 - TESTS DE BOUCLAGE ET DE DERNIERE CARTE
C
310             IF (SENSE SWITCH 0) 99,238
311     238     CONTINUE
312             IF (NS) 102,119,239
313     239     CONTINUE
314             IF (NO - NS) 119,101,101
315      99     PRINT 60
316             STOP 999
317             END
C
C            OUF...
```

DONNEES

```
RR01 0.500000E+00 0.141421E+01
                        0.5000E+02  0.5000E+02
                        0.5000E+02  0.2000E+03
                        0.3934E+03  0.2924E+03  0.2098E+03  0.1710E+03  0.1415E+03
                        0.1228E+03  0.1045E+03  0.8570E+02  0.6250E+02  0.3438E+02
RR01 0.500000E+00 0.141421E+01
                        0.5000E+02  0.2000E+03
                        0.5000E+02  0.5000E+03
                        0.6090E+03  0.4995E+03  0.4210E+03  0.3734E+03  0.3282E+03
                        0.2902E+03  0.2497E+03  0.2046E+03  0.1465E+03  0.8085E+02
```

FREQUENCES SPATIALES EN MM-1

0.5000E 00 0.7071E 00 1.0000E 00 0.1414E 01 0.2000E 01
0.2828E 01 0.4000E 01 0.5657E 01 0.8000E 01 0.1131E 02

TACHE RECTANGULAIRE 0.5000E 02 X 0.2000E 03 MICRONS

SPECTRE DE WIENER EXPERIMENTAL

0.6090E 02 0.4595E 03 0.4210E 03 0.3734E 03 0.3282E 03
0.2902E 03 0.2497E 03 0.2046E 03 0.1465E 03 0.8085E 02

SPECTRE CORRIGE DE LA LARGEUR DE LA FENTE

0.6103E 03 0.5018E 03 0.4245E 01 0.3796E 03 0.3392E 01
0.3101E 03 0.2853E 03 0.2681E 03 0.2558E 03 0.2665E 01

SPECTRE RECONSTITUE PAR UNE SOMME DE 4 GAUSSIENNES

0.6103E 03 0.5016E 03 0.4283E 01 0.3796E 03 0.3422E 03
0.3122E 03 0.2847E 03 0.2489E 03 0.2642E 03 0.2602E 03

DIFFERENCES

0.0000E 00 0.0000E 00 -0.3816E 01 -0.3829E-01 -0.2967E 01
-0.2090E 01 0.8555E 00 -0.7522E 00 -0.8469E 01 0.6370E 01

DIFFERENCES RELATIVES

0.00 % 0.00 % -0.89 % -0.01 % -0.87 %
0.67 % 0.23 % -0.28 % -3.21 % 2.39 %

MERIDIENNE

0.2990E 01 0.1835E 01 0.1205E 01 0.9308E 02 0.7678E 02
0.6714E 02 0.5623E 02 0.5437E 02 0.5360E 02 0.5276E 02

FORME INTEGRALE

0.6641E 04 0.6527E 04 0.6447E 04 0.6389E 04 0.6339E 04
0.6289E 04 0.6217E 04 0.6191E 04 0.6140E 04 0.6047E 04

SPECTRE CALCULE POUR UNE TACHE RECTANGULAIRE DE 0.5000E 02 X 0.5000E 03 MICRONS

0.3866E 03 0.2643E 03 0.2035E 03 0.1675E 03 0.1418E 03
0.1221E 03 0.1071E 03 0.9297E 02 0.8106E 02 0.7197E 02

ECARTS EN MICRONS

0.8839E 02 0.1250E 03 0.1768E 03 0.2500E 03 0.3536E 03
0.5000E 03 0.7071E 03 0.1000E 04 0.1414E 04 0.2000E 04

AUTOCORRELATION

0.1022E 04 0.7779E 03 0.5603E 03 0.4266E 03 0.3176E 03
0.2061E 03 0.1107E 02 0.9744E 02 0.4385E 01 0.8033E-01

DETAIL DE LA DECOMPOSITION EN GAUSSIENNES

SPECTRE A DECOMPOSER

0.6103E 03 0.5016E 03 0.4245E 03 0.3796E 01 0.3392E 03
0.3101E 03 0.2853E 03 0.2681E 03 0.2558E 03 0.2665E 03

* * *

COMPOSANTE NO 1, CALCULEE AVEC LES POINTS NOS 8 9 10

0.2682E 03 0.2682E 03 0.2682E 03 0.2681E 03 0.2680E 01
0.2677E 03 0.2676E 03 0.2662E 03 0.2642E 01 0.2602E 03

A = 0.6466E 02 C = 0.2682E 03

RESIDU

0.3423E 03 0.2334E 03 0.1563E 03 0.1115E 03 0.7123E 02
0.4235E 02 0.1811E 02 0.1951E 01 -0.8404E 01 0.6370E 01

* * *

COMPOSANTE NO 2, CALCULEE AVEC LES POINTS NOS 5 6 7

0.1099E 03 0.1043E 03 0.1003E 03 0.8925E 02 0.7648E 02
0.4435E 02 0.1745E 02 0.2703E 01 0.6485E-01 0.3732E-04

A = 0.2929E 01 C = 0.1127E 03

RESIDU

0.2724E 03 0.1270E 03 0.5602E 02 0.2224E 02 0.5374E 00
-0.2203E 01 0.6556E 00 -0.7522E 00 -0.8465E 01 0.6370E 01

* * *

COMPOSANTE NO 3, CALCULEE AVEC LES POINTS NOS 3 4

0.1122E 03 0.8891E 02 0.5602E 02 0.2224E 02 0.3504E 01
0.8716E 01 0.5308E-04 0.2242E-10 0.2956E-23 0.6189E 49

A = 0.1042E 01 C = 0.1411E 03

RESIDU

0.1626E 03 0.3814E 02 0.2200E 01 0.1100E 01 -0.2967E 01
-0.2203E 01 0.6555E 00 -0.7522E 00 -0.8469E 01 0.6370E 01

* * *

RESSANTE NO 4, CALCULEE AVEC LES POINTS NOS 1 2

0.1626E 03 0.3814E 02 0.3815E 01 0.3819E-01 0.3826E-05
0.1641E 11 0.3972E-29 0.3934E-61 0.0000E 00 0.0000E 00

A = 0.4660E 00 0.1411E 03

RESIDU

0.0000E 00 0.0000E 00 -0.3816E 01 -0.3829E-01 0.2967E 01
-0.2090E 01 0.8555E 00 -0.7522E 00 -0.8469E 01 0.6370E 01

FREQUENCES SPATIALES EN MM-1

0.5000E 00 0.7071E 00 1.0000E 00 0.1414E 01 0.2000E 01
0.2828E 01 0.4000E 01 0.5657E 01 0.8000E 01 0.1131E 02

TACHE RECTANGULAIRE 0.5000E 02 X 0.5000E 03 MICRONS

SPECTRE DE WIENER EXPERIMENTAL

0.3934E 03 0.2924E 03 0.2098E 03 0.1710E 03 0.1415E 03
0.1229E 03 0.1045E 03 0.8570E 02 0.6250E 02 0.3438E 02

SPECTRE CORRIGE DE LA LARGEUR DE LA FENTE

0.3942E 03 0.2936E 03 0.2115E 03 0.1738E 03 0.1462E 03
0.1312E 03 0.1194E 03 0.1123E 03 0.1091E 03 0.1133E 03

SPECTRE RECONSTITUE PAR UNE SOMME DE 4 GAUSSIENNES

0.3942E 03 0.2936E 03 0.2181E 03 0.1742E 03 0.1483E 03
0.1327E 03 0.1191E 03 0.1129E 03 0.1117E 03 0.1116E 03

DIFFERENCES

0.0000E 00 0.0000E 00 -0.6597E 01 -0.1368E 00 -0.2019E 01
-0.9787E 00 0.2726E 00 -0.5860E 00 -0.2610E 01 0.2339E 01

DIFFERENCES RELATIVES

0.00 % 0.00 % -3.02 % -0.08 % -1.38 %
-0.74 % 0.23 % -0.52 % -2.34 % 2.06 %

MERIDIENNE

0.3190E 03 0.2073E 03 0.1316E 03 0.5552E 02 0.7750E 02
0.6779E 02 0.6029E 02 0.5672E 02 0.5606E 02 0.5570E 02

FORME INTEGRALE

0.1041E 05 0.1029E 05 0.1019E 05 0.1012E 05 0.1007E 05
0.1002E 05 0.9979E 04 0.9946E 04 0.9911E 04 0.9848E 04

SPECTRE CALCULE POUR UNE TACHE RECTANGULAIRE DE 0.5000E 02 X 0.2000E 03 MICRONS

0.6524E 03 0.5359E 03 0.4429E 03 0.3808E 03 0.3362E 03
0.2974E 03 0.2559E 03 0.2179E 03 0.1981E 03 0.1837E 03

ECARTS EN MICRONS

0.2839E 02 0.1250E 03 0.1768E 03 0.2500E 03 0.3536E 03
0.5000E 03 0.7071E 03 0.1000E 04 0.1414E 04 0.2000E 04

AUTOCORRELATION

0.1049E 04 0.8785E 03 0.6102E 03 0.4586E 03 0.3284E 03
0.1969E 03 0.9127E 02 0.2483E 02 0.1564E 01 0.1194E 01

DETAIL DE LA DECOMPOSITION EN GAUSSIENNES

SPECTRE A DECOMPOSER

0.3942E 03 0.2936E 03 0.2115E 03 0.1738E 03 0.1462E 03
0.1312E 03 0.1194E 03 0.1123E 03 0.1091E 03 0.1133E 03

* * *

COMPOSANTE NO 1, CALCULEE AVEC LES POINTS NOS 8 9 10

0.1124E 03 0.1124E 03 0.1124E 03 0.1124E 03 0.1124E 03
0.1123E 03 0.1123E 03 0.1121E 03 0.1117E 03 0.1110E 03

B = 0.9975E 02 C = 0.1124E 03

RESIDU

0.2818E 03 0.1812E 03 0.9911E 02 0.6143E 02 0.3388E 02
0.1887E 02 0.7198E 01 0.2460E 00 -0.2598E 01 0.2339E 01

* * *

COMPOSANTE NO 2, CALCULEE AVEC LES POINTS NOS 5 6 7

0.5513E 02 0.5334E 02 0.4993E 02 0.4375E 02 0.3360E 02
0.1981E 02 0.6885E 01 0.8320E 00 0.1215E-01 0.2590E-05

B 0.2751E 03 C 0.5698E 02

RESIDU

0.2264E 03 0.1278E 03 0.4918E 02 0.1768E 02 0.2651E 00
-0.9406E 00 0.2726E 00 -0.5860E 00 -0.2610E 01 0.2339E 01

* * *

COMPOSANTE NO 3, CALCULEE AVEC LES POINTS NOS 3 4

0.1059E 03 0.8203E 02 0.4918E 02 0.1768E 02 0.2284E 01
0.3813E-01 0.1063E-04 0.8258E-12 0.4586E-26 0.1816E-44

B 0.9884E 00 C = 0.1368E 03

RESIDU

0.1207E 03 0.4581E 02 0.1000E-03 0.0000E 00 -0.2019E 01
-0.9787E 00 0.2726E 00 -0.5860E 00 -0.2610E 01 0.2339E 01

* * *

COMPOSANTE NO 4, CALCULEE AVEC LES POINTS NOS 1 2

0.1207E 03 0.4581E 02 0.6597E 01 0.1368E 00 0.5886E-04
0.1089E-10 0.3732E-24 0.4379E-51 0.0000E 00 0.0000E 00

B 0.5080E 00 C = 0.3181E 03

RESIDU

0.0000E 00 0.0000E 00 -0.6597E 01 -0.1368E 00 -0.2019E 01
-0.9787E 00 0.2726E 00 -0.5860E 00 -0.2610E 01 0.2339E 01

B I B L I O G R A P H I E

I - HISTORIQUE

A - Etudes sur la granulation

1) - L.A. JONES - N. DEISCH - The Measurement of Graininess in Photographic Deposits - Jl. Franklin Inst. 190 n°5, Nov. 1920, p. 657-683.

2) - A.C. HARDY - L.A. JONES - Graininess in Motion Picture Negatives and Positives - Trans. S.M.P.E. n°14, Mai 1922, p. 107-119.

3) - J.I. CRABTREE - Graininess of Motion Picture Films - Trans S.M.P.E. 11 n° 29, Juillet 1927, p. 77-92.

4) - J.I. CRABTREE - H.C. CARLTON - Some Properties of Fine Grain Developers for Motion Picture Film - Trans. S.M.P.E. 13 n° 38, 1929, p. 406-444

5) - R. LANDAU - La granulation - La Techn. Cinémat. 1 n°1, Oct. 1930 , p. 8-11

6) - O.E. CONKLIN - Some Applications of the Comparison Microscope in the Film Industry - Jl. S.M.P.E. 16 n°2, Février 1931, p. 159-167

7) - E.M. LOWRY - An Instrument for the Measurement of the Graininess of Photographic Materials - Jl. Opt. Soc. Am. 26 n°1, Janv. 1936, p. 65-72.

L.A. JONES - G.C. HIGGINS - Photographic Granularity and Graininess :

8) - IV - Visual Acuity Thresholds. Dynamic Versus Static Assumptions - Jl. Opt. Soc. Am. 38 n°4, Avril 1948, p. 398-405.

9) - V - A Variable-Magnification Instrument for Measuring Graininess - Jl. Opt. Soc. Am. 41 n°1, Janv. 1951, p. 41-52.

10) - VI - Performance Characteristics of the Variable-Magnification Graininess Instrument - Jl. Opt. Soc. Am. 41 n°2, Fév. 1951, p. 64-75.

11) - M. BILTZ - F. NAGANO - Evaluation of the Graininess of Negatives by Comparison of their Enlargements - Sc. Publ. Fuji Photo Film 2, 1954, p. 11-19.

12) - F.A. HÜBNER - Eine Methode zur Körnigkeitsmessung entwickelter photographischer Schichten - Bild u. Ton 13 n°12, Dec. 1960, p. 365-366.

13) - W. ROMER - E.W.H. SELWYN - An Instrument for the Measurement of Graininess - Phot. Jl. 83, Janv. 1943, p. 17-20.

14) - W. ROMER - A. ZALESKI - Nouvelle technique visuelle d'évaluation de la granulation - Sc. et Ind. Phot. 28 n°1, Janv. 1957, p. 35-36.

15) - W. ROMER - La granulation de l'image photographique .

Zh. Nauch. Prikl. Fot. Kine.
5 n°3, Mai-Juin 1960, p. 225-230.
5 n°5, Sept-Oct. 1960, p. 390-395.
5 n°6, Nov.-Déc. 1960, p. 463-472

16) - W. ROMER - Granulation des images photographiques mesurées par comparaison à des étalons de granulation - Zh. Nauch. Prikl. Fot. Kine. 17 n°2, Mars-Avril 1962, p. 91-95.

17) - W. ROMER - Polish Research on Graininess and Granularity - Jl. Phot. Sc. 11 n°5, Sept-Oct. 1963, p. 260-268.

B - Mesures au moyen de l'effet Callier

18) - S.D. THREADGOLD - The Measurement of Graininess - Phot. Jl. 72, Août 1932, p. 348-351.

19) - S.D. THREADGOLD - The Callier Coefficient and its Relation to Graininess - Phot. Jl. 79, Août 1939, p. 524-527.

20) - J. EGGERT - A. KÜSTER - Über die Körnigkeit photographischer Schichten. Bestimmung der mittleren Korngrösse der entwickelter Schicht aus der Lichtstreuung - Kinotechnik 16 n°8, Avril 1934, p. 127-130.

21) - J. EGGERT - A. KÜSTER - Callierquotient und mittleren Korndurchmesser entwickelter photographischer Schichten - Veroffentl. wiss. Labo. Agfa Vol.4, 1935, p. 49-57.

22) - J. EGGERT - A. KÜSTER - Grain Size Determination and Other Applications of the Callier Effect - Jl. S.M.P.E. 30 n°2, Fév. 1938, p. 181-190.

23) - J. EGGERT - A. KÜSTER - Statistische Versuche zur Beziehung zwischen Callierquotient , Körnigkeit und Grenzvergrösserung - Veroffentl. wiss. Labo. Agfa Vol.6, 1939, p. 186-197.

24) - H. BRANDES - Apparate zur Messung der Körnigkeit entwickelter photographischer Schichten - Veroffentl. wiss. Labo Agfa Vol. 4, 1935, p. 58-68

25) - G. HANSEN - P.H. KECK - Messungen der Körnigkeit an Negativschichten - Zeits. wiss. Phot. 37 n°4, Avril 1938, p. 86-97.

26) - H. FRIESER - W. HORNUNG - Auswirkung von Körnigkeit und Auflösungsvermögen photographischer Schichten im Positiv - Zeits. wiss. Phot. 40 n°3-6, 1941, p.88-124.

27) - M.G. FRACASTORO - Una possibile interpretazione dell'effetto Callier - Atti. Fondaz. G. Ronchi 2 n°1-2, Avril 1947, p.58-60.

C - Méthodes microdensitométriques, granularité quadratique moyenne.

28) - P. BRICOUT - Etude photométrique des irrégularités de densité des plaques photographiques - C.R.Acad. Sc. 197 n°21, 20 Nov. 1933, p. 1202-1205.

29) - A. VAN KREVELD - Nouvelle mesure de la granulation des négatifs photographiques - Sc. Ind. Phot. 6, Août 1935, p.271-272.

30) - A. VAN KREVELD - Objective Measurement of Graininess of Photographic Materials - Jl. Opt. Soc. Am. 26 n°4, Avril 1936, p. 170-176.

31) - A. VAN KREVELD - Graininess of Photographic Materials in Objective Absolute Measure - Jl. Opt. Soc. Am. 27 n°3, Mars 1937, p. 100-109.

32) - A. GOETZ - W.O. GOULD - The Objective Quantitative Determination of the Graininess of Photographic Emulsions - Jl. S.M.P.E. 29 n°5, Nov. 1937, p. 510-519.

33) - A. GOETZ - W.O. GOULD - A. DEMBER - The Objective Measurement of the Graininess of Photographic Emulsions - Jl. S.M.P.E. 34 n°3, Mars 1940, p. 279-310.

34) - E.W.H. SELWYN - A Theory of Graininess - Phot. Jl. 75, Nov. 1935, p. 571-580.

35) - W.J. ALBERSHEIM - Mathematical Relations Between Grain, Background Noise and Characteristic Curve on Sound Film Emulsions - Jl. S.M.P.E. 29 n°4, Oct. 1937, p. 417-445.

36) - H. SIEDENTOPF - Über Körnigkeit, Dichteschwankungen und Vergrösserungsfähigkeit Photographischer Negative. Physik. Zeits. 38 n°12, Juin 1937, p. 454-459.

37) - R. DEBOT - La mesure de la granularité des plaques photographiques ; présentation d'un granularomètre électronique à lecture directe de log σ_T - Bull. Soc. Roy. Sc. Liège 20 n°810, Oct. 1951, p. 514-522.

L.A. JONES - C.C. HIGGINS - Photographic Granularity and Graininess :

38) - III - Some Characteristics of the Visual System of Importance in the Evaluation of Graininess and Granularity - Jl. Opt. Soc. Am. 37 n°4, Avril 1947, p. 217-263.

39) - VII - A Microphotometer for the Measurement of Granularity Jl. Opt. Soc. Am. 41 n°3, Mars 1951, p. 192-200.

40) - IX - Techniques and Equipment for the Objective Measurement of Graininess - Jl. Opt. Soc. Am. 47 n°4, Avril 1957, p. 312-321.

D - Autocorrélation et spectre de Wiener

41) - A. SCHUSTER - On Interference Phenomena - Phil. Mag. 37 n°229, Juin 1894, p. 509-545.

42) - A. SCHUSTER - The Periodogram and its Optical Analogy - Proc. Roy. Soc. 77 n°A 515, Février 1906, p. 136-140.

43) - N. WIENER - Generalised Harmonic Analysis - Acta Mathematica 55 n°2-3, Avril 1930, p. 117-258.

44) - N. WIENER - Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series - Wiley, 1950.

45) - H. CRAMER - On the Theory of Stationary Random Processes - Ann. of Math. 41 n°1, Janv. 1940, p. 215-230.

46) - H. CRAMER - Mathematical Methods of Statistics - Princeton Univ. Press., 1946.

47) - M. LOEVE - Sur la covariance d'une fonction aléatoire - C.R.Acad. Sc. 220 n°10, 5 Mars 1945, p. 295-296.

48) - M. LOEVE - Analyse harmonique générale d'une fonction aléatoire - C.R.Acad.Sc. 220 n°12, 19 Mars 1945, p. 380-382.

49) - M. LOEVE - Probability Theory - Van Nostrand, 1955.

50) - P.M. DUFFIEUX - L'intégrale de Fourier et ses applications à l'optique - Univ. de Besançon, 1946.

51) - H. FRIESER - H. LINKE - Zum Theorie und Messung des Auflösungsvermögens photographischer Schichten - Zeits. wiss. Phot. 37 n°1-2, Janv.-Fév. 1938, p. 19-26.

52) - P.ELIAS - D.S. GREY - D.Z. ROBINSON - Fourier Treatment of Optical Processes - Jl. Opt. Soc. Am. 42 n°2, Fév. 1952, p. 127-134.

53) - E.L. O'NEILL - The Modulation Function in Optics - Tech. Note n°110, Boston Univ. Phys. Res. Lab., 1954.

54) - A. MARECHAL - Etude des effets comparés de la diffraction et des aberrations géométriques sur l'image d'un point lumineux - Rev. Opt. 26 n°9, Sept. 1947, p. 257-277.

55) - A. MARECHAL - The Contrast of Optical Images and the Influence of Aberrations - Nat. Bur. Stand. Circ. n° 526 - Proc. of Symp. on Opt. Image Evaluation, Oct. 1951.

56) - A. MARECHAL - Contraste des images de quelques objets-types dans un instrument stigmatique - Rev. Opt. 32 n°12, Déc. 1953, p. 649-660.

57) - A. MARECHAL - The Formation of Optical Images - 50th. Anniv. Meetg., Opt. Soc. Am., Mars 1966 - Communication WE 2.

58) - A. OFFNER - Optical Design and Modulation Transfer Functions - Phot. Sc. and Eng. 9 n°4, Juillet-Août 1965, p. 240-243.

59) - D.A. BELL - Information Theory and its Engineering Applications - Pitman, 1956.

60) - L. BRILLOUIN - La science et la théorie de l'information - Masson, 1956.

61) - H. NYQUIST - Certain Factors Affecting Telegraph Transmission - Bell. Syst. Tech. Jl. 3 n°2, Avril 1924, p. 324-346.

62) - H. NYQUIST - Certain Topics in Telegraph Transmission Theory - Trans. A.I.E.E. 47, Avril 1928, p. 617-644.

63) - R.V.L. HARTLEY - Transmission of Information - Bell. Syst. Tech. Jl. 7 n°3, Juillet 1928, p. 535-564.

64) - D. GABOR - Theory of Communication - Jl. Inst. Elect. Eng. 93 n°26, Nov. 1946, p. 429-457.

65) - C.E. SHANNON - A Mathematical Theory of Communication - Bell. Syst. Tech. Jl. 27 n°3, Juillet 1948, p. 379-656.

66) - P.B. FELLGETT - Concerning Photographic Grain, Signal-to-Noise Ratio, and Information. Jl. Opt. Soc. Am. 43 n°4, Avril 1953, p. 271-282.

67) - S. OOUE - I. HATANAKA - Determination of Grain Size Distribution of Silver Halide by Autocorrelation Function - Jl. Appl. Phys. Japan 30 n°3, Mars 1961, p. 180-186.

68) - J. OHZU - H. KUBOTA - Autocorrelation Function of Ag Grains in Photographic Emulsion - Jl. Appl. Phys. Japan 26 n°3, Mars 1957, p. 96-101.

69) - E.R. KRETZMER - Statistics of Television Signals - Bull. Syst. Tech. Jl. 31 n°4, Juillet 1952, p. 751-763.

70) - B. PICINBONO - M. SAVELLI - Mesures sur le bruit de fond en optique (spectre lié au grain des films photographiques) - Optica Acta 2 n°2, Juillet 1955, p. 106-107.

71) - R. CLARK-JONES - New Method of Describing and Measuring the Granularity of Photographic Materials - Jl. Opt. Soc. Am. 45 n°10, Oct 1955, p. 799-808.

72) - A. BLANC-LAPIERRE - B. PICINBONO - M. SAVELLI - Mesure sur le bruit de fond en optique (spectre lié au grain des émulsions photographiques). Rev. Opt. 36 n°7, Juillet 1957, p. 357.

73) - H. FRIESER - Messung des Schwankungspektrums und der mittleren Schwarzung entwickelter photographischer Schichten - Mitt. Forsch. Agfa Vol.II, Springer-Verlag, 1958, p. 249-269.

74) - M. SAVELLI - Etude théorique et expérimentale des propriétés statistiques de la transparence des films photographiques. Thèse, Fac. Sc. Alger, 1958 - Alger Sc. Phys. 4 n°2, Déc. 1958, p. 121-140 ; 5 n°1, Mars 1959, p. 5- 44.

75) - E.C. DOERNER - Wiener-Spectrum Analysis of Photographic Granularity - Jl. Opt. Soc. Am. 52 n°6, Juin 1962, p. 669-672.

76) - E.C. DOERNER - The Use of the Wiener Spectrum (Power Spectrum) for Studying the Granularity of Photographic Systems - Congrès Int. Sc. Phot., Paris, Sept. 1965.

77) - H.J. ZWEIG - Autocorrelation and Granularity :

Part I - Theory - Jl. Opt. Soc. Am. 46 n°10, Oct. 1956, p. 805-811.

Part II - Results on Flashed Black-and-White Emulsions - Jl. Opt. Soc. Am. 46 n°10, Oct. 1956, p. 812-820.

Part III - Spatial Frequency Response of the Scanning System and Granularity Correlation Effects beyond the Aperture - Jl. Opt. Soc. Am. 49 n°3, Mars 1959, p. 238-244.

78) - R. VERBRUGGHE - M. DE BELDER - G. LANGNER - Granularity in Colour Films - Congrès Int. Sc. Phot., Paris, Sept 1965.

79) - J. CAULTIER DU MARACHE - Application de l'intégrale de Fourier aux images photographiques - Thèse, Fac. Sc. Besançon, 1952. Cah. Phys. 6 n°39, p. 5, 6 n°40, p. 29.

80) - P. CROCE - M. MARQUET - Détermination optique du bruit de fond photographique - Optica Acta 2 n°2, Juillet 1955, p.107-108.

81) - P. CROCE - M. MARQUET - Etude des spectres de fréquences spatiales dans les négatifs photographiques - Optica Acta 3 n°2, Juin 1956, p. 94-95.

82) - M. MARQUET - Facteur de transmission des fréquences spatiales du récepteur photographique. Essai de caractérisation du bruit - Jl. Phys. Rad. 22 n°4, Avril 1961 , p.19S-21S.

83) - H. THIRY - Power Spectrum of Granularity as Determined by Diffraction - Jl. Phot. Sc. 11 n°2, Mars-Avril 1963, p. 69-77.

84) - R. DESPREZ - J. POLLET - Etude de l'image photographique par analyse harmonique optique - Sc. et Ind. Phot. 35 n°5, Mai 1964, p. 113-118.

85) - B. PICINBONO - Modèle statistique suggéré par la distribution des grains d'argent dans les films photographiques - C.R.Acad.Sc. 240 n°23, 6 Juin 1955, p. 2206-2208.

86) - B. PICINBONO - Fluctuations de la transparence locale d'un film photographique uniformément impressionné - C.R.Acad.Sc. 240 n°24, 16 Juin 1955, p. 2296-2298.

87) - P. FAURE - Sur quelques résultats relatifs aux fonctions aléatoires stationnaires isotropes introduites dans l'étude expérimentale de certains phénomènes des fluctuations - C.R.Acad.Sc. 244 n°7, Fév. 1957, p. 842-844 - Erratum 244 n°13, 25 Mars 1957, p. 1843.

88) - P. FAURE - Déduction de certaines propriétés statistiques d'une fonction aléatoire stationnaire isotrope définie dans un espace à plusieurs dimensions de l'étude de sa trace sur une courbe de cet espace - C.R.Acad.Sc. 244 n°8, 18 Fév. 1957, p. 998-1000.

89) - P. FAURE - M. SAVELLI - Etude théorique de la variation en fonction de l'aire de mesure, du coefficient de Selwyn, défini à propos de la granularité des films photographiques - C.R.Acad.Sc. 244 n°19, 6 Mai 1957, p. 2371-2375.

90) - M. SAVELLI - Etude d'un modèle suggéré par des recherches sur les propriétés statistiques de la transparence des émulsions photographiques - C.R.Acad.Sc. 244 n°13, 25 Mars 1957, p. 1710-1712.

91) - P. FAURE - M. SAVELLI - Remarques sur l'utilisation des fonctions caractéristiques et des fonctions génératrices dans certains problèmes de physique - Cah. Phys. 11 n°80, Avril 1957, p. 149-158.

92) - M. SAVELLI - Résultats pratiques de l'étude d'un modèle à trois paramètres pour la représentation des propriétés statistiques de la granularité des films photographiques et notamment des propriétés spectrales - C.R.Acad.Sc. 246 n°26, 30 Juin 1958, p. 3605-3608

93) - B.E. BAYER - J.F. HAMILTON - Computer Investigation of a Latent-Image Model - Jl. Opt. Soc. Am. 55 n°4, Avril 1965, p. 439-452.

94) - B.E. BAYER - Relation between Granularity and Density for a Random-Dot Model - Jl. Opt. Soc. Am. 54 n°12, Déc. 1964, p. 1485-1490.

Autres références sur la granularité.

95) - Mme AEBISCHER-NEOSCHIL - J. GAULTIER DU MARACHE - P.M. DUFFIEUX - H.Ch. VIENOT - W.J. OBERT - Analyse spectrale des images photographiques - Optica Acta 7 n°1, Janv. 1960, p. 1-19.

96) - Ph. BAUDRY - Problèmes d'échantillonnage dans la mesure des spectres de granularité photographique - C.R.Acad.Sc. 260 n°20, 17 Mai 1965, p. 5220-5223.

97) - Ph. BAUDRY - D. PRETESEILLE - Résultat d'études sur la granularité. Congrès Int. Sc. Phot., Paris, Sept. 1965.

98) - Ph. BAUDRY - R. DESPREZ - Problems of Integral Equations in the Measurement of Granularity - 6ème Conférence de Phot. Sc. et Appl., Budapest, Mars 1966.

99) - L. BERWART - Measurement of the Frequency Function and of the Correlation Function in Granularity - Coll. Int. Sc. Phot., Turin, 1963

100) - L. BERWART - Sur les lois théoriques relatives à la granularité des images photographiques - Bull. Soc. Roy. Sc. Liège 32 n°3-4, 1963, p. 213-227.

101) - L. BERWART - Sur la fonction de distribution et la fonction de corrélation des écarts en transparence des images photographiques - Bull. Soc. Roy. Sc. Liège 32 n°10, 1963, p. 794-803.

102) - L. BERWART - Sur la théorie de la courbe caractéristique d'une émulsion photographique - Bull. Soc. Roy. Sc. Liège 32 n°5-6, 1963, p. 336-347.

103) - L. BERWART - Spectre de bruit des émulsions photographiques - Bull. Soc. Roy. Sc. Liège 34 n°5-6, 1965, p. 284-301.

104) - L. BERWART - Etude statistique de la distribution des écarts en transparence dus à la granularité - Bull. Soc. Roy. Sc. Liège 34 n°5-6, 1965, p. 266-283.

105) - L. BERWART - Détermination expérimentale de la fonction de corrélation des écarts en transparence dus à la granularité et calcul du spectre de bruit à partir de la fonction de corrélation - Sc. et Ind. Phot. 36 n°7-8, Juillet-Août 1965, p. 137-146.

106) - G. BISHOP - Veillez au grain ! - Photo-Cinéma n° 749, Mars 1964, p.89-92.

107) - A. BLANC-LAPIERRE - Modèles statistiques pour l'étude de phénomènes de fluctuations - Masson, 1963.

108) - H.G. BOOKER - J.A. RATCLIFFE - D.H. SHINN - Diffraction from an Irregular Screen with Applications to Ionospheric Problems - Phil. Trans. A 242 n° 856, Sept. 1950, p. 579-670.

109) - T. CELIO - A Device for Measuring the Granularity of Photographic Emulsions - Phot. Sc. and Eng. 5 n°1, Janv.-Fév. 1961, p. 12-16.

110) - L.D. CLARK - C.N. NELSON - The Effect of the Granularity of the Negative on the Tone - Reproduction Characteristics of the Print - Phot. Sc. and Eng. 6 n°2, Mars-Avril 1962, p. 84-91.

111) - R. DEBOT - Mesure de la granularité d'agrandissements sur plaques - Research 2 n°3, 1949, p. 139-145.

112) - R. DEBOT - Mesure de la granularité d'agrandissements photographiques - Sc. et Ind. Phot. 20 n°10, Oct. 1949, p. 364-368.

113) - R. DEBOT - La mesure de la granularité des images photographiques - Mém. Soc. Roy. Sc. Liège, 10 n°4, 1951, p. 1-258.

114) - R. DEBOT - La loi de l'aire en granularité - Bull. Soc. Roy. Sc. Liège 23 n°2, Fév. 1954, p. 79-89.

115) - R. DEBOT - W. REY - La mesure de la distribution statistique de la transparence des émulsions photographiques - Bull. Soc. Roy. Sc. Liège 33 n°1-2, 1964, p. 82-86.

116) - R. DEBOT - Granularité photographique : mesure de la distribution des écarts en transparence et de la fréquence spatiale d'occurence d'une transparence donnée - Congrès Int. Sc. Phot., Paris, Sept. 1965.

117) - H. FRIESER - Noise Spectrum of Developed Photographic Layers Exposed by Light, X-Rays and Electrons - Phot. Sc. and Eng. 3 n°4, Juillet-Août 1959, p. 164-169.

118) - H. FRIESER - G. FINDEIS - Messung der mittleren Schwärzungschankung und des Schwankungsspektrums photographischer Schichten - Phot. Korr. 101 n°6-7, 1965, p. 85-92 et 101-109.

119) - S.B. GUREVICH - A.A. MARKELOVA - I.I. BREIDO - G.A. GAVRILOV - Le bruit photographique et le rapport signal/bruit de diverses couches photographiques - Zh. Nauch. Prikl. Fot. Kine. 8 n°4, Juillet-Août 1963, p. 284-292.

120) - K. HACKING - An Analysis of Film Granularity in Television Reproduction - Jl. S.M.P.T.E. 73 n°12, Déc. 1964, p. 1015-1029.

121) - E.F. HAUGH - Theory for Optical Density and Developed Silver as Functions of Exposure - Phot. Sc. and Eng. 6 n°6, Nov. - Déc. 1962, p. 370-375.

122) - E.F. HAUGH - A Structural Theory for the Selwyn Granularity Coefficient - Jl. Phot. Sc. 11 n°2, Mars-Avril 1963, p. 65-68.

123) - A. HAUTOT - Sur la validité de la loi de Siedentopf - Sc. et Ind. Phot. 33 n°2, Fév. 1962, p. 41-48.

124) - A. HAUTOT - L. BERWART - Sur le spectre de fréquences de la granularité ; sa visualisation et sa mesure - Sc. et Ind. Phot. 34 n°12, Déc. 1963, p. 341-349.

125) - A. HAUTOT - L. BERWART - On the Wiener Spectrum of Granularity in Photographic Images - Coll. Int. Sc. Phot. Turin, Sept. 1963.

126) - G.C. HIGGINS - K.F. STULTZ - Experimental Study of R.M.S. Granularity as a Function of the Scanning Spot Size.- Jl. Opt. Soc. Am. 49 n°9, Sept. 1959, p. 925-929.

127) - G.C. HIGGINS - Methods for Engineering Photographic Systems. Appl. Optics 3 n°1, Janv. 1964, p. 1-10.

L.A. JONES - G.C. HIGGINS - Photographic Granularity and Graininess :

128) - I - The Relationship between the Granularity and Graininess of Developed Photographic Material - Jl. Opt. Soc. Am. 35 n°7, Juillet 1945, p. 435-457.

129) - II - The Effects of Variations in Instrumental and Analytical Techniques - Jl. Opt. Soc. Am. 36 n°4, Avril 1946, p. 203-227.

130) - VIII - A Method of Measuring Granularity in Terms of the Scanning Area Giving a Th reshold Luminance Gradient - Jl. Opt. Soc. Am. 45 n°2, Fév. 1955, p. 107-112.

131) - E. KLEIN - G. LANGNER - Relation between Granularity, Graininess and the Wiener Spectrum of Density Deviations - Jl. Phot. Sc. 11 n°4, Juillet-Août 1963, p. 177-185.

132) - G. LANGNER - Zur Berechnung der Körnigkeit und der Kontrastschwelle photographischer Schichten - Phot. Korr. 96 n°11, Nov.1963, p. 177-185.

133) - J.C. MARCHANT - P.L.P. DILLON - Correlation between Random-Dot Samples and the Photographic Emulsion - Jl. Opt. Soc. Am. 51 n°6, Juin 1961, p. 641-644.

134) - F. MARSOT - Etude de la structure des émulsions photographiques développées et de la lumière diffractée par cette structure - Dipl. Et. Sup., Fac. Sc. Paris, 1964.

135) - E.L. O'NEILL - Graininess and Entropy - Jl. Opt. Soc. Am. 48 n°12, Déc. 1958, p. 945-947.

136) - S. OOUE - Studies on the Graininess and Granularity. I- A New Granularité Measuring Instrument - Jl. Soc. Sc. Phot. Japan 23 n°1, Mars 1960, p. 7-10.

137) - S. COUE - Graininess and Granularity of Photographic Materials - Jl. Appl. Phys. Japan 29 n°3, Mars 1960, p. 169-175, 29 n°8, Août 1960, p. 525-535.

138) - R. ROETLING - Effects of Signal-Dependent Granularity - Jl. Opt. Soc. Am. 55 n°1, Janv. 1965, p. 67-71.

139) - K. SAYANAGI - H. OHZU - New Definition of Graininess by Fourier Analysis - Bull. Soc. Phot. Japan n°7, Déc. 1957, p. 10-12.

140) - O.H. SCHADE - Image Gradation, Graininess and Sharpness in Television and Motion Picture Systems :
Jl. S.M.P.T.E. 55, Fév. 1951, p. 137-171,
58, Mars 1952, p. 181-222,
61, Août 1953, p. 97-164,
64, Nov. 1955, p. 593-617.

141) - E.W.H. SELWYN - Experiments on the Nature of Graininess - Phot. Jl. 79, Août 1939, p. 513-524.

142) - E.W.H. SELWYN - Estimation of Print Graininess from Measurements on the Negative Material - Phot. Jl. 83, Juin 1943, p. 227-233.

143) - E.W.H. SELWYN - Le rapport de la granularité à la pente de la courbe de noircissement - Sc. et Ind. Phot. 20 n°11, Nov.1949, p. 405-412.

144) - R. SHAW - The Application of Fourier Techniques and Information Theory to the Avancement of Photographic Image Quality - Phot. Sc. and Eng. 6, 1962, p. 281-286.

145) - M. TAMURA - H. KUBOTA - Power Spectrum of Ag Grains of Photographic Emulsion - Jl. Appl. Phys. Japan 26 n°3, Mars 1957, p. 92-95.

146) - H. THIRY - Some Qualitative and Quantitative Results on Spatial Filtering of Granularity - Appl. Optics 3 n°1 , Janv. 1964, p. 39-44.

147) - M. VERBRUGGHE - Granularity in Colour Films - Symposium "Optimum Results from Colour Photography", Londres, Déc. 1964.

148) - E. ZEITLER - Die Übertragungstheorie in der Photographie.II-Körnigkeit - Mitt. Forsch. Agfa Vol. II, Springer-Verlag, 1958, p. 229-248.

149) - D. ZWICK - Colour Granularity and Graininess - Jl. Phot. Sc. 11 n°5, Sept.-Oct. 1963, p. 269-245.

150) - D. ZWICK - Quantitative Studies of Factors Affecting Granularity - Phot. Sc. Eng. 9 n°3, Mai-Juin 1965, p. 145-148.

II - PRINCIPES MATHEMATIQUES DE BASE

A - Transformation de Fourier

151) - A . ARSAC - Transformation de Fourier et théorie des distributions - Dunod, 1951.

152) - L. SCHWARTZ - Méthodes mathématiques pour les sciences physiques - Hermann, 1961.

153) - D.H. KELLY - Systems Analysis of the Photographic Process. I - A Three-Stage Model - Jl. Opt. Soc. Am. 50 n°3, Mars 1960, p. 269-276.

154) - A. MARECHAL - M. FRANÇON - Traité d'optique instrumentale. Tome 2 : Diffraction, structure des images - Revue d'Optique, 1960.

155) - P. DUMONTET - Sur la correspondance objet-image en optique - Optica Acta 2 n°2, Juillet 1955, p. 53-63.

156) - A. MARECHAL - La formation des images d'objets étendus. Dans S. FLÜGGE : Handbuch der Physik vol. XXIV, p. 148-155. Springer-Verlag, 1956.

B - Théorie des distributions

157) - L. SCHWARTZ - Théorie des distributions - Hermann, vol. I, 1957, vol. II, 1959.

158) - I. HALPERIN - Introduction to the Theory of Distributions - Univ. of Toronto Press, 1952.

159) - I.M. GUELFAND - G.E. CHILOV - Les distributions - Dunod, vol. I, 1962 - vol. II, 1964 - vol. III, 1965.

160) - M. BOUIX - Les fonctions généralisées ou distributions - Dunod, 1965.

C - Fonctions aléatoires stationnaires

161) - A. BLANC-LAPIERRE - R. FORTET - Théorie des fonctions aléatoires - Masson, 1953.

162) - W.B. DAVENPORT - W.L. ROOT - An Introduction to Random Signals and Noise - Mc. Graw-Hill, 1958.

163) - A. BLANC-LAPIERRE - B. PICINBONO - Propriétés statistiques du bruit de fond - Masson, 1961.

164) - J.L. DOOB - Stochastic Processes - Wiley, 1953.

E - Equations intégrales

165) - M. BOCHER - An Introduction to the Study of Integral Equations - Cambridge Univ. Press, 1909.

166) - V. VOLTERRA - Leçons sur les équations intégrales et sur les équations intégro-différentielles - Gauthier-Villars, 1913.

167) - F.G. TRICOMI - Integral Equations - Interscience Publishers, 1957.

168) - S.G. MIKHLIN - Integral Equations and their Applications to Certain Problems in Mechanics, Mathematics, Physics and Technology - Pergamon Press, 1957.

169) - F. SMITHIES - Integral Equations - Cambridge University Press, 1962.

170) - P. FRANCK - R. Von MISES - Differential Gleichungen der Physik - Braunschweig, 1930.

171) - C.R. YOKLEY - J.B. SCHUMAKER - Computer of the Abel Inversion - Rev. Sc. Instr. 34 n°5, Mai 1963, p. 551-557.

172) - M. CAPET - Localisation de l'émission d'une source cylindrique par observation latérale - C.R.Acad.Sc. 257 n°13, 23 Sept. 1963, p. 1912-1914.

173) - J.G. WEGROWE - Mesure de la distribution de densité électronique dans les plasmas au moyen d'un interféromètre hyperfréquences à optique focalisante - Thèse, Fac. Sc. Paris, 1963.

174) - R. CLARK-JONES - On the Point and Line Spread Functions of Photographic Images - Jl. Opt. Soc. Am. 48 n°12, Déc. 1958, p. 934-937.

175) - E.W. MARCHAND - Derivation of the Point Spread Function from the Line Spread Function - Jl. Opt. Soc. Am. 54 n°7, Juillet 1964, p. 915-919.

176) - E.W. MARCHAND - From Line to Point Spread Function : The General Case - Jl. Opt. Soc. Am. 55 n°4, Avril 1965, p. 352-354.

III - EXPRESSIONS MATHEMATIQUES DE LA GRANULARITE

177) - K. SAYANAGI - H. OHZU - Note on the One-Dimensional Representation of Autocorrelation Function in Two-Dimensional Problem - Jl. Appl. Phys. Japan 26 n°9, Sept. 1957, p. 471-472.

178) - P.S. UBEROI - Optical Measurement of Spectra of Two-Dimensional Functions - Rev. Sc. Instr. 33 n°3, Mars 1962, p. 314-318.

179) - E.A. TRABKA - Wiener Spectrum of Scans Obtained from an Isotropic Two-Dimensional Random Field - Jl. Opt. Soc. Am. 55 n°2, Fév. 1965, p. 203-204.

IV - DESCRIPTION ET ETUDE DE L'APPAREIL

180) - G. BRUHAT - Cours de Physique Générale - Optique - Masson, 1954.

181) - H.J. LUSH - Photomultiplier Linearity - Jl. Sc. Instr. 42 n°8, Août 1965, p. 597-602.

V - QUELQUES RESULTATS ET LEUR INTERPRETATION

182) - K. ROSSMANN - The Effect of Some Physical Factors on Radiographic Image Quality - Radiology 84, Janv. 1965, p. 123-124.

183) - K. KOSSMANN - Recording of X-Ray Quantum Fluctuations in Radiographs - Jl. Opt. Soc. Am. 52 n°10, Oct 1962, p. 1162-1164.

184) - K. ROSSMANN - Spatial Fluctuations of X-Ray Quanta and the Recording of Radiographic Mottle - Am. Jl. Roentgenology 90 n°4, Oct. 1963, p. 863-869.

185) - K.F. STULTZ - H.J. ZWEIG - Relation between Graininess and Granularity for Black-and-White Samples with Non-uniform Granularity Spectra - Jl. Opt. Soc. Am. 49 n°7, Juillet 1959, p. 693-702.

VI - EFFET CALLIER

186) - C. JONES - On the Practical Causes of Discrepancies in Optical Measurements - Phot. Jl. 23, Déc. 1898, p. 102-107.

187) - C.E.K. MEES - The Theory of the Photographic Process - Mc Millan, 1942.

188) - A. CALLIER - The Absorption and Scatter of Light by Photographic Negatives, Measured by Means of the Martens Polarization Photometer - Phot. Jl. 49 n°4, Avril 1909, p. 200-210.

189) - R. GÖRISCH - Untersuchungen über den Callier-Effekt - Zeits. wiss. Phot. 48 n°4, Juillet 1953, p. 85-102.

190) - P.G. POWELL - A Simple Treatment of the Relation between Diffuse and Specular Density - Jl. Phot. Sc. 4 n°5, Oct.1956, p. 120-125.

191) - H. FRIESER - L'action des électrons sur les couches photographiques - Sc. et Ind. Phot. 28 n°11, Nov. 1957, p. 436-444.

192) - K. SAYANAGI - A Theory on Callier Q Factor and Granularity - Jl. Soc. Sc. Phot. Japan 23 n°1, Mars 1960, p. 20-24.

193) - P. VERNIER - Sur l'action photographique des électrons. Application aux observations astronomiques - Thèse, Fac. Sc. Paris, 1958.

194) - P. VERNIER - Etude de l'effet Callier et de sa relation avec la granularité des plaques photographiques. C.R.Acad.Sc. 246 n°10, 10 Mars 1958, p. 1527-1530.

195) - P. VERNIER - Application de la notion de cohérence partielle à la théorie du microdensitomètre : pouvoir de résolution - C.R.Acad.Sc. 250 n°1, 4 Janvier 1960, p. 100-102.

196) - P. VERNIER - Définition du contour du spot d'un densitomètre, effet Callier et granulation photographique - Rev. d'Optique 39 n°11, Nov. 1960, p. 505-515.

197) - J.H. ALTMAN - The Measurement of R.M.S. Granularity - Appl. Optics 3 n°1, Janv. 1964, p. 35-38.

198) - R. DEBOT - Influence des caractéristiques optiques de l'instrument utilisé à la mesure de la granularité - Sc. et Ind. Phot. 27 n°6, Juin 1956, p. 217-223.

199) - T.H. JAMES - G.C. HIGGINS - Fundamentals of Photographic Theory - Morgan and Morgan, 1960.

200) - H. Von HELMHOLTZ - Physiological Optics - Opt. Soc. Am., 1924, p. 230-231.

201) - V. TWERSKY - Rayleigh Scattering - Appl.Optics 3 n°4, Oct.1964, p. 1151-1162.

202) - R. SEVE - Les phénomènes de diffusion de la lumière. Théorie classique et application à l'opacité des papiers - Bull. A.T.I.P. 18 n°6, 1964, p. 255-265.

203) - G.W.W. STEVENS - The Blackness of Developed Silver - Jl. Phot. Sc. 13 n°5, Sept.-Oct. 1965, p. 228-232.

204) - M. BORN - E. WOLF - Principles of Optics - Pergamon Press, 1964 (2e éd.)

205) - G.L. ROGERS - The Process of Image Formation as the Re-transfromation of the Partial Coherence Pattern of the Object - Pro. Phys. Soc. 81 n° 520, Fév. 1963, p. 323-331

VII - PROBLEMES D'ECHANTILLONNAGE

206) - F.J. WALL - B.G. STEEL - Implications of the Methods Chosen for the Measurement of the Statistical Properties of the Photographic Images - Jl. Phot. Sc. 12 n°1, Janv.-Fév. 1964, p. 34-46.

207) - R.M. FANO - Short-Time Autocorrelation Functions and Power Spectra - Jl. Accoust. Soc. Am. 22 n°5, Sept. 1960, p. 546-550.

208) - M.R. SCHRÖDER - B.S. ATAL - Generalised Short-Time Power Spectra and Autocorrelation Functions - Jl. Acoust. Soc. Am. 34 n°11, Nov. 1962, p. 1679-1683.

209) - R.B. BLACKMAN - J.W. TUKEY - The Measurement of Power Spectra - Dover Publications, 1958.

210) - A. BLANC-LAPIERRE - B. PICINBONO - Propriétés statistiques du bruit de fond - Masson, 1961.

211) - B. PICINBONO - Tendance vers le caractère gaussien par filtrage sélectif - C.R.Acad.Sc. 250 n°7, 15 Fév. 1960, p. 1174-1176 .

212) - B. PICINBONO - Sur une méthode de mesure de la densité de probabilité d'une tension de bruit et la vérification expérimentale de la tendance vers la loi de Gauss par filtrage sélectif - C.R.Acad.Sc. 250 n°25, 20 Juin 1960, p. 4123-4125.

213) - P. FAURE - Etude expérimentale de la tendance vers la loi de Gauss de la transparence en intensité des films photographiques uniformément impressionnés - C.R.Acad.Sc. 250 n°7, 15 Fév. 1960, p. 1229-1231.

214) - A. ZIYA AKCASU - Measurement of Noise Power Spectra by Fourier Analysis - Jl. Appl. Phys. U.S.A. 2 n°4, Avril 1961, p. 565-568.

VIII - PROBLEMES DE FONCTIONS D'APPAREIL

215) - R. COURANT - D. HILBERT - Methods of Mathematical Physics - Interscience Publishers, 1953.

216) - E.A. ROBINSON - Predictive Decomposition of Seismic Traces - Geophysics 22 n°4, Oct. 1957, p. 767-768.

217) - N. RICKER - Wavelet Contraction, Wavelet Expansion, and the Control of Seismic Resolution - Geophysics 18 n°4, Oct. 1953, p. 769-792.

218) - R.B. RICE - Inverse Convolution Filters - Geophysics 27 n°1, Fév. 1962, p. 4-18.

219) - A. LICHNEROWICZ - Algèbre et analyse linéaires - Masson, 1960.

IX - EVALUATIONS GLOBALES DE LA GRANULARITE

220) - R. MARRIAGE - E. PITTS - Relation between Granularity and Autocorrelation - Jl. Opt. Soc. Am. 46 n°12, Déc. 1956, p. 1019-1027 - 47 n°4, Avril 1957, p. 321-326.

221) - G.N. WATSON - A Treatise on the Theory of Bessel Functions, p. 62-64 ; p. 666.

222) - G. PETIAU - La théorie des fonctions de Bessel - C.N.R.S., 1955.

223) - S.OOUE - Response Function of the Eye - Jl. Appl. Phys. Japan, 28 n°8 , Sept. 1959, p. 531-534.

224) - E.M. LOWRY - J.J. DE PALMA - Sine-wave Response of the Visual System - I - The Mach Phenomenon - Jl. Opt. Soc. Am. 51 n°7, Juillet 1961, p. 740-746.

225) - A. ARNULF - O. DUPUY - La transmission des contrastes par le système optique de l'oeil et les seuils de contraste rétiniens - C.R.Acad.Sc. 250 n°15, 11 Avril 1960, p. 2757-2759.

226) - A. ARNULF - O. DUPUY - S. BERGER-LHEUREUX - Mesure de la fonction de transfert de modulation du système optique de l'oeil et des seuils de modulation rétiniens ; application aux instruments visuels - 6ème Congrès Inst. d'Optique "Abbilden und sehen", Munich, Août 1962.

227) - O. BRYNGDAHL - On the Determination of the Modulation Transfer Function of the Visual System from Contrast-Phenomena-Effects Measurements Communic. WD 16, Opt. Soc. Am. Annual Meetg., 1963, Jl. Opt. Soc. Am. 53 n°11, Nov. 1963, p. 1336.

D E U X I E M E T H E S E

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

Phénomènes électro et magnéto-optiques

Vu et approuvé :

Paris, le 22 Décembre 1966

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Marc ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Paris

Jean ROCHE